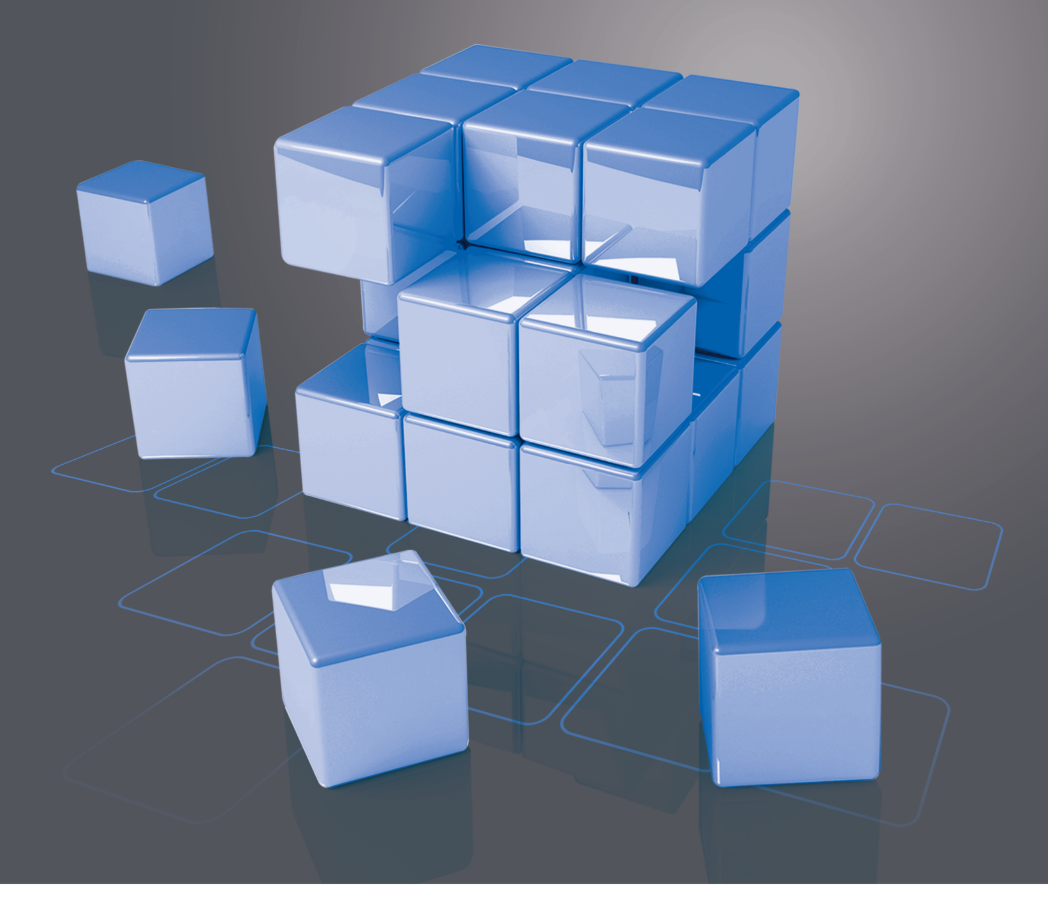
Geometría

Actividades





Geometría
Libro de actividades
Quinto grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Josué Dueñas Leyva / Christian Yovera López
Marcos Pianto Aguilar / Julio Julca Vega
Óscar Díaz Huamán / Kristian Huamán Ramos
Saby Camacho Martinez / Eder Gamarra Tiburcio
Jhonatan Peceros Tinco

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Lourdes Zambrano Ibarra / Natalia Mogollón Mayurí
Roger Urbano Lima

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición 2013
Tiraje: 15 000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.º 2013-12012
ISBN: 978-612-313-083-1
Registro de Proyecto Editorial N.º 31501001300694

Impreso en Perú / Printed in Peru

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, Lima, S.J.L.
RUC 10090984344

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344

La Colección Intelectum Evolución para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.
La divulgación de la Colección Intelectum Evolución se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.
El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.



Contenido


Geometría
Geometría
Geometría
Unidad 1
Geometría

RECUERDA

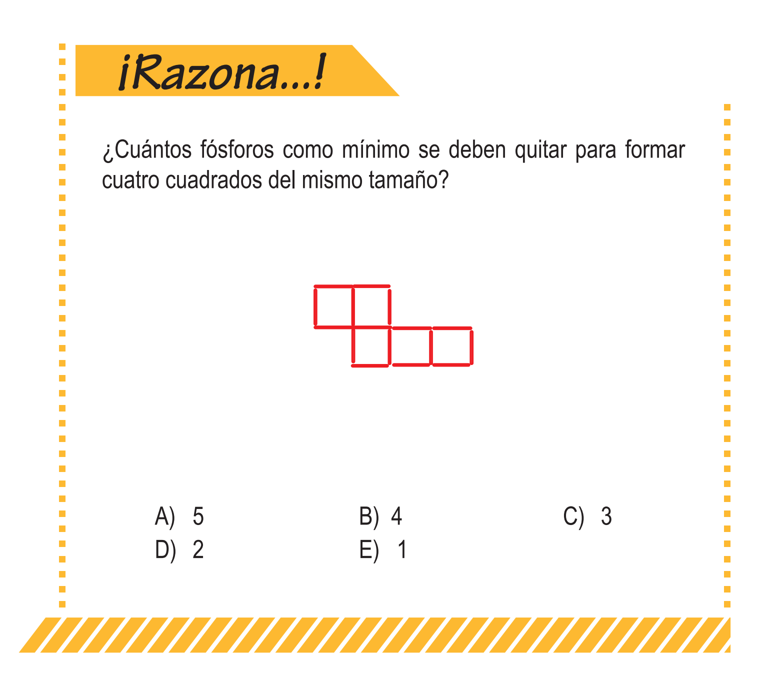
Euclides (300 a. C.)

Matemático griego, cuya obra principal, Elementos de Geometría, es un extenso tratado de matemáticas dividido en trece volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón. Enseñó Geometría en Alejandría y allí fundó una escuela de matemáticas. Los Cálculos (una colección de teoremas geométricos), los Fenómenos (una descripción del firmamento), la Óptica, la División del canon (un estudio matemático de la música) y otros libros se han atribuido durante mucho tiempo a Euclides. Sin embargo, la mayoría de los historiadores cree que alguna o todas estas obras (aparte de los Elementos) se le han adjudicado erróneamente. Probablemente, las secciones geométricas de los Elementos fueron; en un principio, una revisión de las obras de matemáticos anteriores, como Eudoxo, pero se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos en la teoría de números.

Los Elementos, de Euclides, se utilizó como texto durante dos mil años e incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros constituye la base de la enseñanza de la geometría plana en las escuelas secundarias. La primera edición impresa de las obras de Euclides, que apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín.

Reflexiona

- *En el esquema general de las cosas, nuestras vidas son solo notas pasajeras en el lienzo de la eternidad; por eso, ten la sensatez de disfrutar de tu viaje y saborear el proceso.*
- *La disciplina te permite hacer todas esas cosas que en tu corazón sabes que debes llevar a cabo, pero que muchas veces no estás de humor para hacer.*
- *De todas las grandes virtudes del mundo la más necesaria e indispensable para lograr el éxito es la perseverancia.*



¡Razona...!

¿Cuántos fósforos como mínimo se deben quitar para formar cuatro cuadrados del mismo tamaño?

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1






TEMA 1: TRIÁNGULOS

1 En un triángulo ABC se cumple AB + BC = 30 cm. Luego se ubica un punto M sobre $\overline{AC}$; si AC = 20 cm, calcula el menor valor entero de BM.

A) 6 cm B) 4 cm C) 2 cm
D) 10 cm E) 9 cm

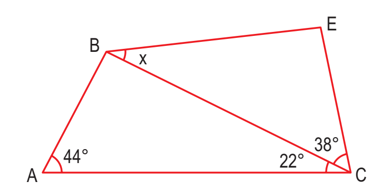
2 En el interior de un triángulo ABC, se toma el punto E, de tal manera que AE = BE y AB = EC. Si: m∠ABE = m∠ECA = x, m∠EAC = 2x ∧ m∠EBC = 5x. Calcula el valor de x.

A) 5° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 18°

3 Los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 5 cm. Calcula el mínimo valor entero que puede asumir el perímetro.

A) 29 cm B) 30 cm C) 31 cm
D) 32 cm E) 33 cm

4 En la figura: AB = CE. Calcula el valor de x.



A) 20° B) 30° C) 45° D) 60° E) 37°

5 En el interior de un triángulo ABC, se toma el punto O, de modo que OA = OC = AB. Si: m∠ABC = 12x, m∠OAC = 3x y m∠OCB = 2x. Calcula el valor de x.

A) 5° B) 6° C) 7° D) 8° E) 9°

6 En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BE. Calcula la m∠AEB, si la m∠A = 80° y la m∠C = 40°.

A) 60° B) 65° C) 70° D) 75° E) 80°

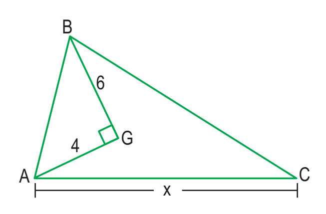
7 En un triángulo ABC se trazan $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ (alturas) que se intersecan en D. Si el ángulo ADC es 125°. ¿Cuánto mide el ángulo ABE?

A) 50° B) 60° C) 80° D) 55° E) 75°

8 ¿Qué fracción de la longitud de la hipotenusa es la distancia del ortocentro al baricentro de un triángulo rectángulo?

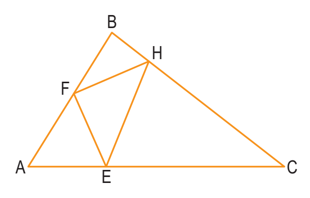
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

9 Calcula el valor de x, si G es baricentro del △ABC.



A) 12 B) 9 C) 5 D) 7 E) 10

10 Calcula la m∠FHE, si la m∠BAC = 50°, además el △FEH es el triángulo órtico del △ABC.



A) 75° B) 80° C) 85° D) 30° E) 60°

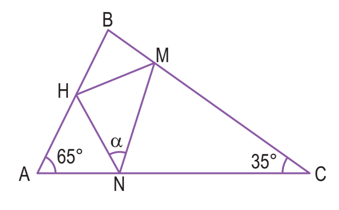
11 Si en un triángulo ABC, O es el ortocentro, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{OC}$, respectivamente. Calcula MN, si: AB = 24 y OC = 10.

A) 12 B) 5 C) 13 D) 20 E) 21

12 En la figura H es el ortocentro y O es el circuncentro del triángulo ABC. Si BH = OB, calcula θ.

A) 15° B) 20° C) 30° D) 35° E) 45°

13 Calcula α, si el triángulo MNH es el triángulo órtico del triángulo ABC.



A) 15° B) 25° C) 30° D) 20° E) 35°

14 Los lados de un triángulo ABC, tienen longitudes: AB = 10, BC = x – 5 y AC = 2x – 3. ¿Entre qué valores se encuentra el perímetro del triángulo ABC?

A) $20 < 2p < 26$
B) $15 < 2p < 20$
C) $16 < 2p < 22$
D) $24 < 2p < 30$
E) $26 < 2p < 30$

Claves

1. A 2. D 3. E 4. B 5. B 6. C 7. D 8. B 9. E 10. B 11. C 12. B 13. D 14. A

Practiquemos

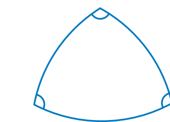


NIVEL 1

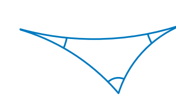
Comunicación matemática

1. Relaciona los gráficos con los conceptos

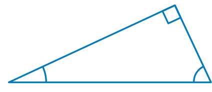
I. Triángulo hiperbólico ( )



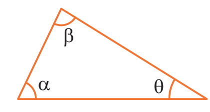
II. Triángulo parabólico ( )



III. Triángulo elíptico ( )



2. Relaciona teniendo en cuenta el gráfico:

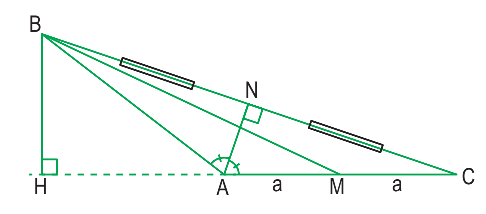


I. Equilátero y acutángulo ( ) $\alpha = \beta$ y $\theta > 90°$

II. Isósceles y obtusángulo ( ) $\theta = \beta$ y $\beta = \alpha$

III. Rectángulo y escaleno ( ) $\alpha = 90°$ y $\beta = 37°$

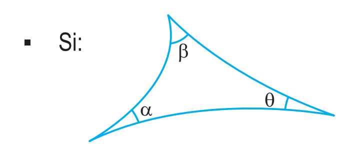
3. Rellena con $\overline{BM}$, $\overline{AN}$ o $\overline{BM}$ en los recuadros según corresponda, si tenemos el siguiente gráfico:



- ☐ es mediatriz y bisectriz.
- ☐ es ceviana externa y altura.
- ☐ es ceviana interna y mediana.

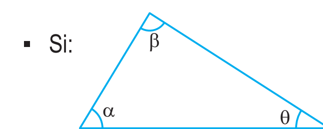
4. Rellena los recuadros con los símbolos >, < o = según corresponda.

- Si:



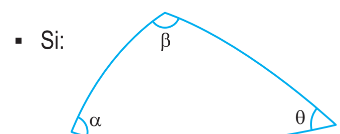
Triángulo hiperbólico
$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta$ ☐ 180°

- Si:



Triángulo parabólico
$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta$ ☐ 180°

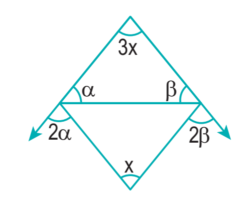
- Si:



Triángulo elíptico
$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta$ ☐ 180°

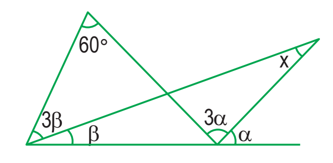
Razonamiento y demostración

5. En la figura, calcula x.



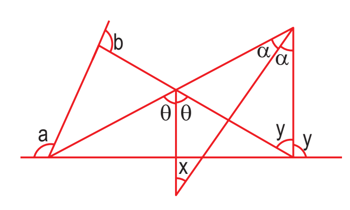
A) 30° B) 36° C) 45°
D) 20° E) 18°

6. En la figura mostrada, calcula x.



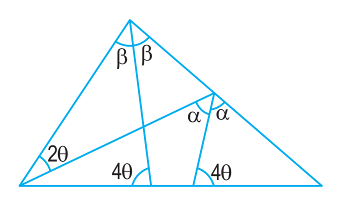
A) 15° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 35°

7. Calcula x, si a + b = 260°.



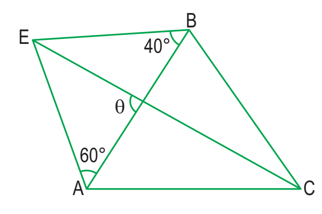
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

8. Del gráfico, calcula θ.



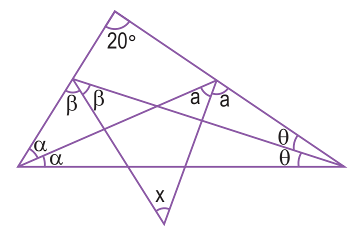
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

9. Del gráfico, calcula θ. Si E es el excentro del $\triangle ABC$.



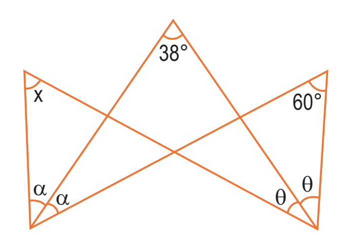
A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 90°

10. Halla x.



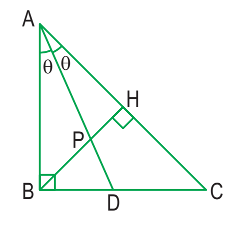
A) 25° B) 40° C) 30°
D) 15° E) 19°

11. Halla x.



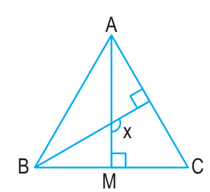
A) 16° B) 18° C) 28°
D) 32° E) 42°

12. Si PH = 3 y BD = 4, calcula BH.



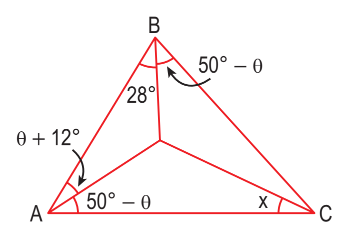
A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

13. En el triángulo ABC, la m∠A es 80° y la m∠B es 60°. Calcula x.



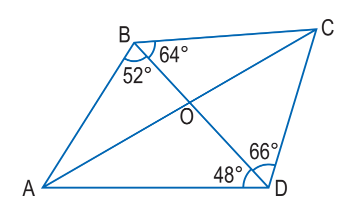
A) 100° B) 80° C) 140°
D) 40° E) 50°

14. A partir del gráfico, calcula x.



A) 26° B) 28° C) 27° D) 36° E) 30°

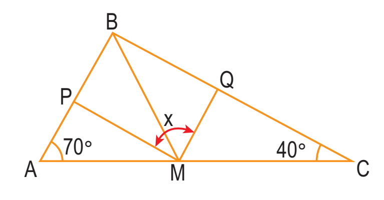
15. En la figura, calcula m∠DOC.



A) 72° B) 68° C) 82°
D) 88° E) 92°

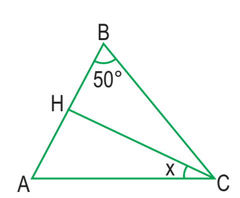
Resolución de problemas

16. Si $\overline{MP}$ es altura del △ABM y $\overline{MQ}$ es altura del △BMC, calcula x.



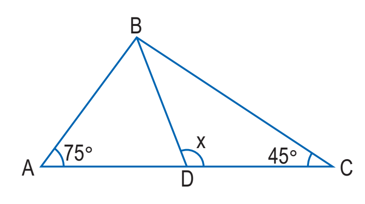
A) 100° B) 110° C) 120°
D) 90° E) 130°

17. Si AB = BC y $\overline{CH}$ es altura, calcula x.



A) 65° B) 25° C) 35°
D) 40° E) 30°

18. Calcula x, si $\overline{BD}$ es bisectriz.

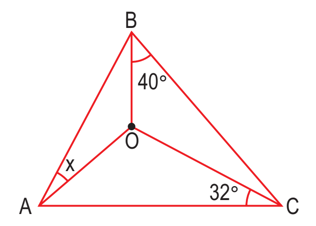


A) 100° B) 105° C) 110°
D) 115° E) 125°

19. En un triángulo ABC, se traza la ceviana BD, tal que AB = BD = DC. Si AC = BC, halla el ángulo BAC.

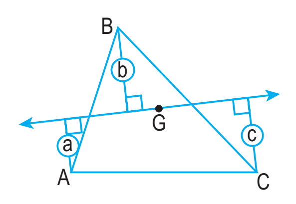
A) 36° B) 40° C) 72°
D) 10° E) 18°

20. En la figura mostrada calcula x, si O es el ortocentro del triángulo ABC.



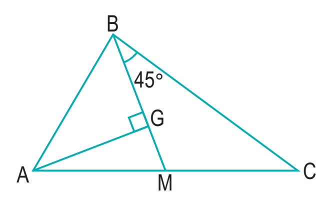
A) 20° B) 22° C) 18°
D) 24° E) 16°

21. En la figura G es el baricentro del triángulo ABC. Si: a + c = 7, halla b.



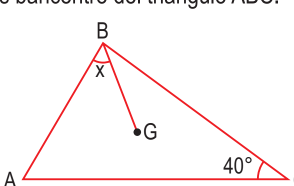
A) 7 B) 5 C) 6
D) 3,5 E) 10,5

22. Calcula BC, si G es baricentro del triángulo ABC y GM = 1



A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

23. Según la figura, AC = 3BG. Calcula x si G es baricentro del triángulo ABC.



A) 50° B) 40° C) 30° D) 60° E) 80°

24. En un triángulo isósceles ABC se traza la altura BH y la mediana AM, las cuales se intersecan en el punto P. Calcula BH, si PM = $\sqrt{2}$ y m∠BPM = 45°

A) 7 B) 6 C) 10
D) 8 E) 9

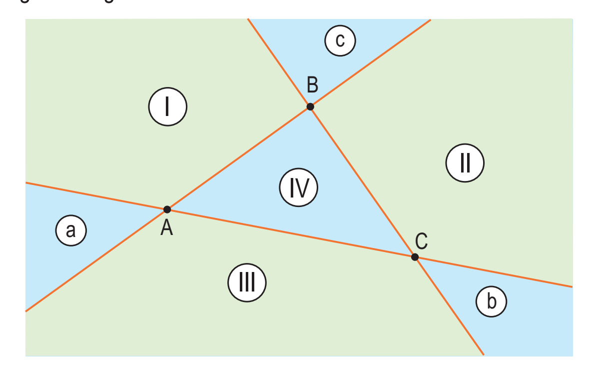
25. En un triángulo acutángulo ABC; L es el ortocentro y O el circuncentro. Si, BL = 8 m, halla la distancia del circuncentro al lado AC.

A) $4\sqrt{2}$ m B) $4\sqrt{3}$ m C) 4 m
D) 2 m E) $2\sqrt{3}$ m

NIVEL 2

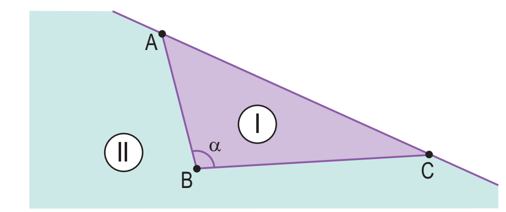
Comunicación matemática

26. Coloca V (verdadero) o F (falso) según lo mostrado en la siguiente figura.



- Todo triángulo determina dos regiones en el plano. ( )
- II es la región relativa a $\overline{AC}$. ( )
- I ∪ II ∪ III es la región externa del △ABC. ( )
- IV es la región interna del △ABC. ( )

27. Rellena las recuadros con los símbolos >, < o = según corresponda.



Sea H el ortocentro del △ABC.

- H ∈ región I, si a ☐ 90°
- H = B, si a ☐ 90°
- H ∈ región II, si a ☐ 90°

28. Marca verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. El baricentro de un triángulo siempre está ubicado en su interior. ( )

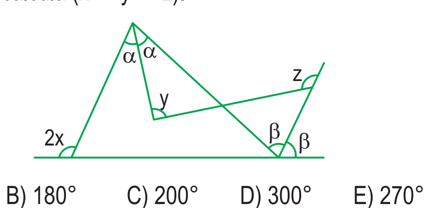
II. Todo triángulo tiene tres excentros. ( )

III. El incentro de un triángulo obtusángulo está ubicado en el exterior del triángulo. ( )

A) VVV B) VFV C) VFF D) VVF E) FVF

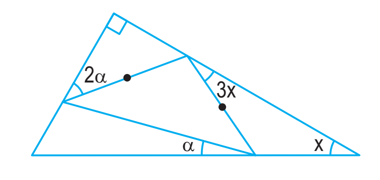
Razonamiento y demostración

29. En la figura, calcula (x + y + z).



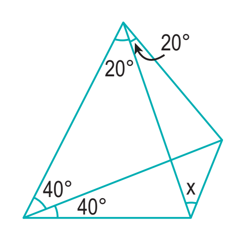
A) 360° B) 180° C) 200° D) 300° E) 270°

30. En la figura, calcula x.



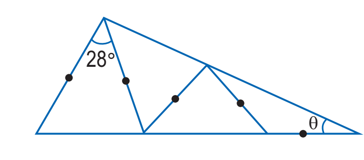
A) 30° B) 20° C) 10°
D) 15° E) 18°

31. Calcula x.



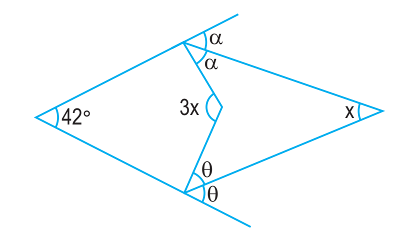
A) 20° B) 15° C) 30°
D) 35° E) 25°

32. Halla θ.



A) 9° B) 15° C) 19°
D) 20° E) 17°

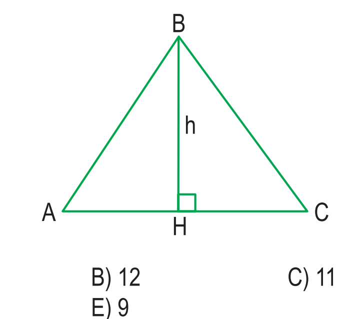
33. Calcula x.



A) 30° B) 42° C) 84°
D) 60° E) 21°

Resolución de problemas

34. Calcula el máximo valor entero que toma h, si: AB + BC = 24

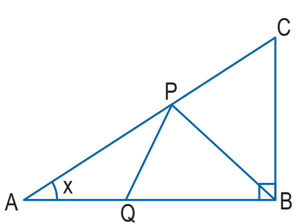


A) 13 B) 12 C) 11
D) 10 E) 9

35. En un triángulo ABC isósceles (AB = BC) la m∠ABC = 100°, luego se trazan las cevianas AP y BQ, tal que: m∠BAP = m∠QBC = 30°. Halla: m∠APQ

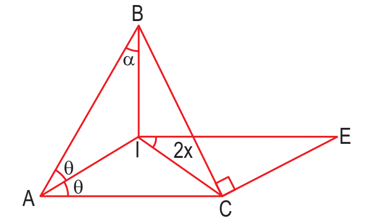
A) 15° B) 20° C) 30° D) 36° E) 40°

36. Calcula x, si: AQ = PQ = PB = BC



A) 22°30'
B) 40°30'
C) 15°30'
D) 25°30'
E) 30°30'

37. Si: BI = CE; BC = AB y $\overline{BC} \perp \overline{CE}$, calcula α (I es incentro del ΔABC).



A) 18°
B) 20°
C) 24°
D) 36°
E) 42

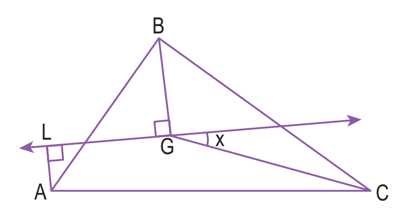
38. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, que contiene al circuncentro del triángulo ABC.Calcula la m∠OPC, siendo O el circuncentro del triángulo PBC y la m∠BAC = 65°.

A) 65° B) 60° C) 55° D) 50° E) 45°

39. En un triángulo ABC, se trazan las alturas AP y CQ, calcula la medida del ángulo determinado por $\overline{PQ}$ y $\overline{OB}$, siendo O el circuncentro del triángulo ABC, además BP = BQ.

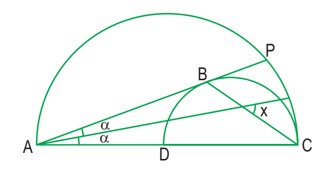
A) 60° B) 75° C) 90° D) 100° E) 110°

40. Del gráfico, calcula x, si BG = LG = 4(AL); siendo G el baricentro de la región triangular ABC.



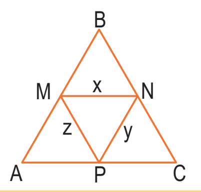
A) 30°
B) 60°
C) 37°
D) 53°
E) 30°

41. Del gráfico, $\overline{AB}$ es tangente, tal que: $\overline{AC}$ y $\overline{DC}$ son diámetros. Calcula x.



A) 30°
B) 60°
C) 75°
D) 37°
E) 45°

42. En la figura: AB = 9, BC = 10, AC = 7, BM = 6, BN = 7 y AP = 4. Calcula x, si x; y; z son máximos enteros.



A) 8
B) 12
C) 11
D) 10
E) 9

43. En un triángulo ABC, I es el incentro y O el circuncentro. Si los ángulos AIC y AOC son suplementarios, calcula la medida del ángulo B.

A) 30° B) 60° C) 45° D) 36° E) 53°

44. En un triángulo acutángulo ABC; m∠A – m∠C = 28°. Del circuncentro O se traza $\overline{OG}$ perpendicular al lado AC; si la m∠OGB = 15°. Halla la m∠OBG.

A) 9° B) 18° C) 15° D) 13° E) 12°

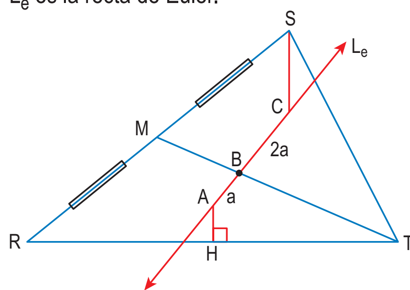
45. La suma de las distancias de los vértices de un triángulo a una recta exterior es 42. Halla la distancia del baricentro a dicha recta exterior.

A) 21 B) 14 C) 18 D) 24 E) 28

NIVEL 3

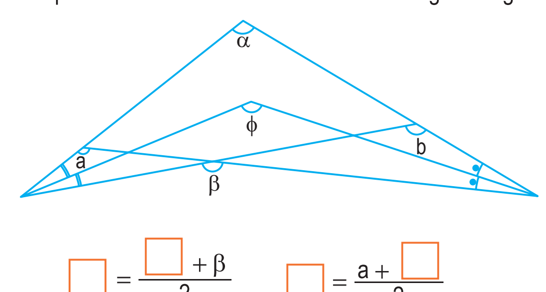
Comunicación matemática

46. Coloca V (verdadero) o F (falso) según el siguiente gráfico, donde $\overleftrightarrow{L_e}$ es la recta de Euler.



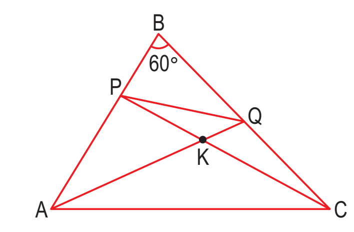
I. A es el circuncentro del ΔRST. ( )
II. C es el baricentro del ΔRST. ( )
III. $\overline{AH}$ es la mediatriz de RT. ( )
IV. AM = SC ( )

47. Completa los recuadros con los valores del siguiente gráfico.



$\square = \dfrac{\square + \beta}{2}$ $\square = \dfrac{a + \square}{2}$

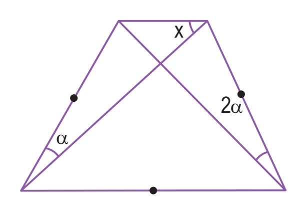
48. Si: AP = PQ = QC. ¿Qué punto notable es K respecto al triángulo ABC?



A) Incentro
B) Cincuncentro
C) Ortocentro
D) Baricentro
E) Excentro

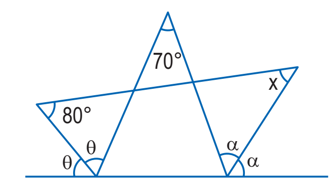
Razonamiento y demostración

49. En la figura, calcula x.



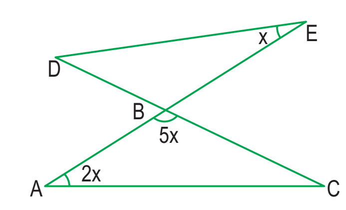
A) 30° B) 15°
C) 45° D) 20°
E) 10°

50. Según el gráfico, calcula x.



A) 35° B) 40°
C) 45° D) 50°
E) 55°

51. En la figura, si: AC = CD = DE. Calcula x.

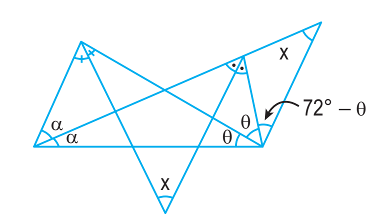


A) 10° B) 12°
C) 15° D) 18°
E) 20°

52. Se tiene un triángulo ABC, se traza la mediana BM, tal que: AM = MC = BM. Calcula la m∠ABC.

A) 60° B) 90° C) 75°
D) 120° E) 100°

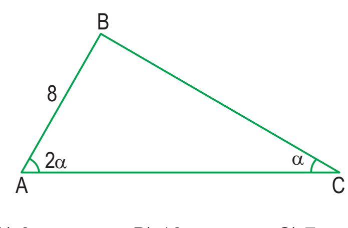
53. Del gráfico, calcula x.



A) 24° B) 30° C) 36°
D) 45° E) 60°

Resolución de problemas

54. Un valor entero para BC puede ser:



A) 8 B) 16 C) 7
D) 18 E) 15

55. En un triángulo isósceles ABC, m∠B = 120°; la distancia del ortocentro al circuncentro es 12. Calcula la altura relativa al lado AC.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) N. A.

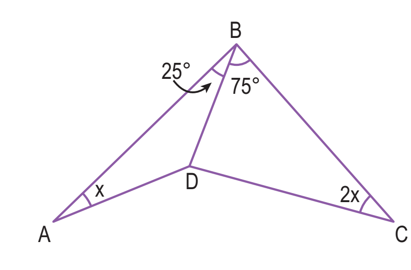
56. En un triángulo ABC, m∠A = 78°, m∠B = 24°. D es el circuncentro, I es el incentro. Halla m∠DAI.

A) 18° B) 24° C) 27°
D) 30° E) 36°

57. En un triángulo ABC, de baricentro G, la m∠BGC = 90°, m∠GBC = 30° y GC = 2 m. Calcula AG.

A) 2 m B) 4 m C) 3 m
D) 5 m E) 6 m

58. En la figura AB = BC; m∠C = 2m∠A, m∠ABD = 25° y m∠DBC = 75°. Halla la m∠A.

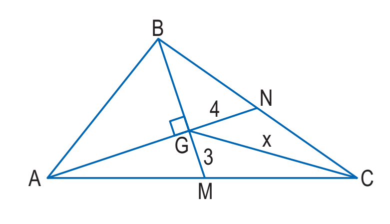


A) 5° B) 7° C) 10°
D) 15° E) 12°

59. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura BH; se toman los incentros E y F de los triángulos AHB y BHC respectivamente, la prolongación de $\overline{EF}$ corta a $\overline{BC}$ en Q. Si BH = 4, halla BQ.

A) 4 B) $2\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{3}$ D) 2
E) $4\sqrt{2}$

60. Si G es baricentro del ΔABC, calcula x.



A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 10

61. En un cuadrado ABCD, M y R son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, además $\overline{BR} \cap \overline{AM}$ = {P}. Calcula la m∠OPR; siendo O el centro de dicho cuadrado.

A) 30° B) 35° C) 45°
D) 50° E) 60°

62. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, de incentro I, se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$. Calcula HC, si su exradio relativo a $\overline{BC}$ mide 4 m.

A) 3 m B) 4 m C) $4\sqrt{2}$ m
D) 2 m E) $4\sqrt{3}$ m



Claves

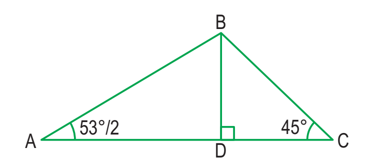
NIVEL 1	10. B	20. C	29. E	39. C	48. B	58. A
1.	11. A	21. A	30. E	40. C	49. A	59. A
2.	12. E	22. D	31. C	41. E	50. C	60. E
3.	13. C	23. A	32. C	42. A	51. E	61. C
4.	14. B	24. B	33. B	43. D	52. B	62. B
5. B	15. D	25. C	34. C	44. D	53. C	
6. A	16. B	**NIVEL 2**	35. C	45. B	54. E	
7. D	17. B	26.	36. A	**NIVEL 3**	55. B	
8. E	18. B	27.	37. A	46.	56. C	
9. C	19. C	28. D	38. A	47.	57. B	

Aplicamos lo aprendido



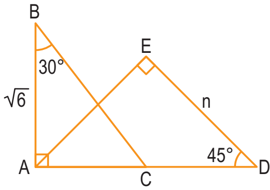
TEMA 2: TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

1 Halla AB, si $BC = \sqrt{2}$.



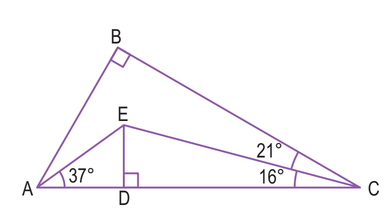
A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{2}$

2 En la figura mostrada; calcula el valor de $n^2 + 1$. (C es punto medio de $\overline{AD}$).



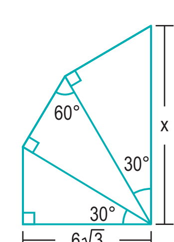
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3 De la figura, calcula AB, si ED = 21.



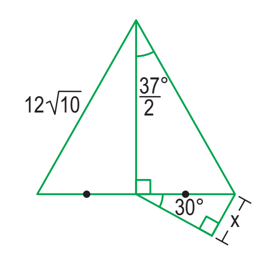
A) 60 B) 50 C) 40 D) 80 E) 70

4 De la figura, calcula x.



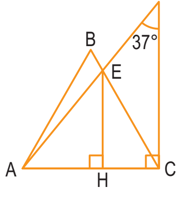
A) 20 B) $10\sqrt{3}$ C) 16 D) 18 E) 24

5 De la figura, calcula x.



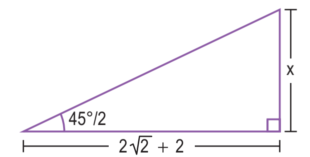
A) 4 B) 6 C) 8 D) 5 E) 10

6 En la figura el triángulo ABC es equilátero; $AB = 6\sqrt{3} + 8$. Calcula EH.



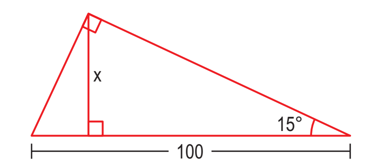
A) $6\sqrt{3} + 2$ B) 8 C) $8\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) 6

7 De la figura mostrada, calcula x.



A) 2 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

8 De la figura, calcula $\sqrt{x}$.

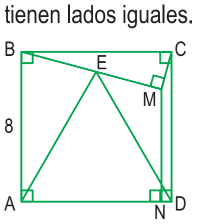


A) 5 B) 10 C) 4 D) 6 E) 8

9 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 y uno de sus ángulos 15°. Encuentra la medida del lado del cuadrado inscrito en el triángulo, si se sabe que uno de sus lados está sobre la hipotenusa.

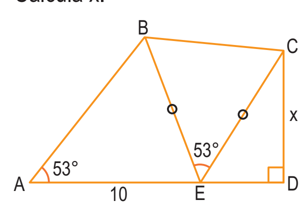
A) 3 B) 4 C) 2 D) 5 E) 3,5

10 Halla MN, si el cuadrado ABCD y el triángulo equilátero AED tienen lados iguales.



A) 7 B) 4 C) 6 D) 5 E) $6\sqrt{2}$

11 Calcula x.



A) 8 B) 6 C) 10 D) 9 E) 7

12 Los ángulos de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Calcula su perímetro en función de la altura H, relativa a la hipotenusa.

A) $3H(\sqrt{2}+2)$ B) $2H(\sqrt{3}+1)$ C) $4H\sqrt{3}$
D) $3H(\sqrt{3}+1)$ E) $2H(\sqrt{3}-1)$

13 El triángulo ABC es equilátero y su perímetro es 48 m, calcula x. Además P es punto medio del lado AC.

B
R
Q
A
S ⊢x⊣ P
C

A) 8 m B) 3 m C) 2 m D) 9 m E) 7 m

14 En un triángulo ABC recto en B, la hipotenusa mide 4 y el ángulo C mide 22,5°, halla la longitud de la altura BH.

A) 1 B) 0,5 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

Claves

1. D	3. A	5. B	7. A	9. B	11. A	13. B
2. C	4. C	6. C	8. A	10. C	12. B	14. E

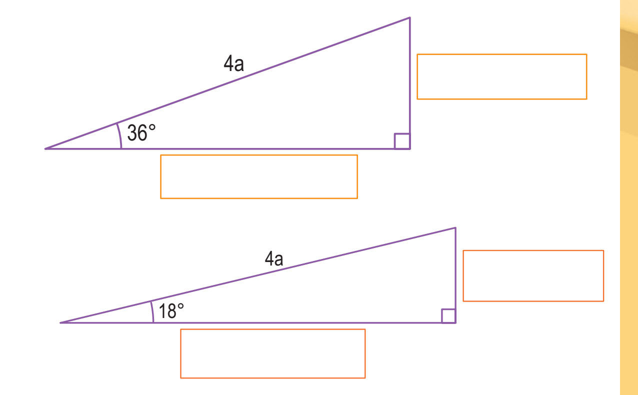
Practiquemos



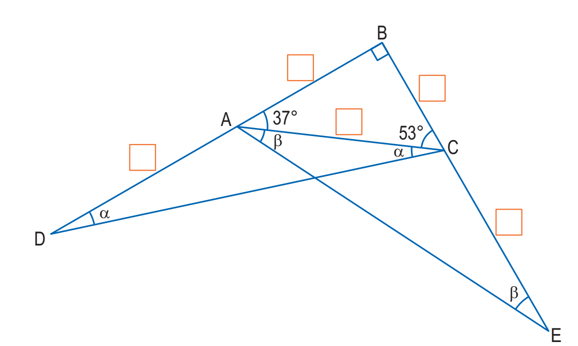
NIVEL 1

Comunicación matemática

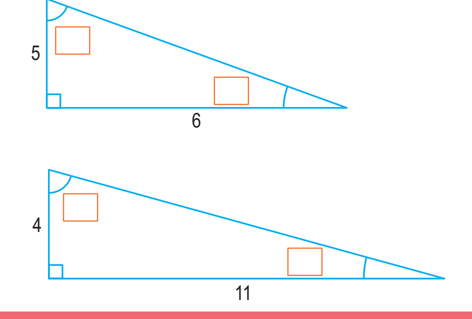
1. Completa los recuadros en función de **a**.



2. Completa los recuadros, si: $AE = 4\sqrt{5}$ y $CD = 3\sqrt{10}$.

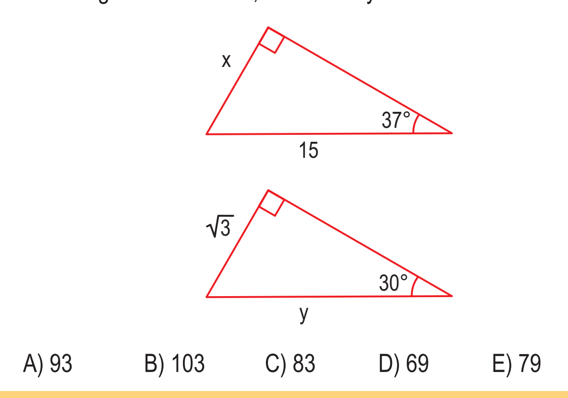


3. Completa los círculos con los valores correspondientes.



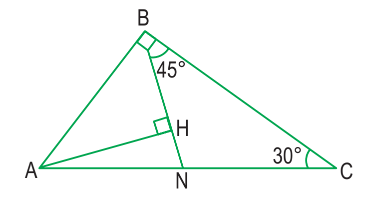
Razonamiento y demostración

4. De las figuras mostradas, halla: $x^2 + y^2$.



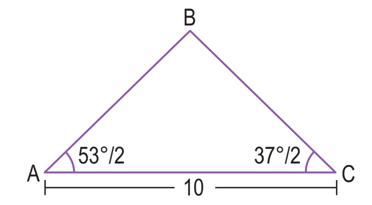
A) 93 B) 103 C) 83 D) 69 E) 79

5. Según el gráfico, $BH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Calcula AC.



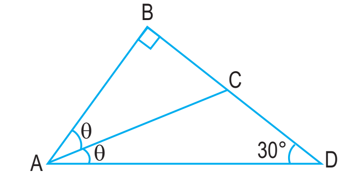
A) 30
B) 10
C) 5
D) $10\sqrt{2}$
E) $7\sqrt{2}$

6. Según el gráfico, calcula AB.



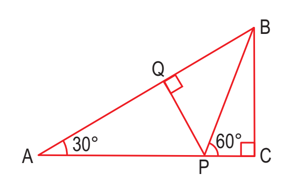
A) $2\sqrt{5}$
B) $3\sqrt{5}$
C) $2\sqrt{10}$
D) $3\sqrt{10}$
E) 5

7. En la figura, calcula CD, si: BC = 14 m.



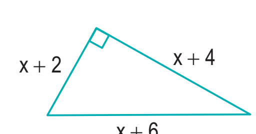
A) 20 m
B) 26 m
C) 28 m
D) 14 m
E) 29 m

8. En la figura, BC = 30 m. Calcula PQ.



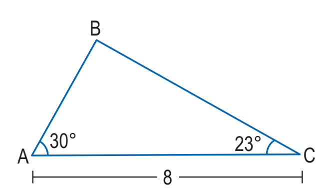
A) $9\sqrt{3}$ m
B) $14\sqrt{3}$ m
C) $12\sqrt{3}$ m
D) $8\sqrt{3}$ m
E) $10\sqrt{3}$ m

9. De la figura, calcula el valor de x.



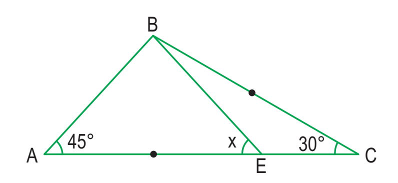
A) 3
B) 4
C) 5
D) 2
E) 6

10. Según el gráfico, calcula BC.



A) $3\sqrt{3}$
B) 5
C) $3\sqrt{2}$
D) 4
E) 6

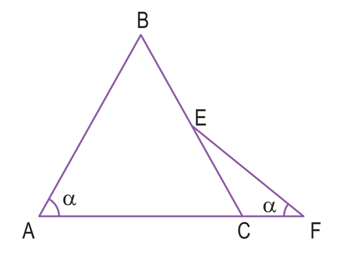
11. Del gráfico, calcula x.



A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 37°
E) 75°

Resolución de problemas

12. En la figura, BE = EC y EF = 2. Calcula AB.



A) 4
B) 6
C) $2\sqrt{2}$
D) 2,5
E) $2\sqrt{3}$

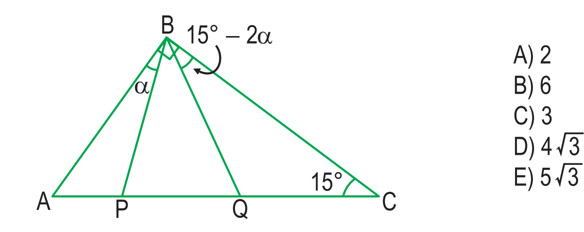
13. En un triángulo ABC se traza la mediana BM en cuya prolongación se ubica el punto E tal que m∠ECM = m∠MCB, ME = 2 y m∠BEC = 45°. Calcula la distancia del punto A a $\overline{BC}$.

A) 2 B) 6 C) $4\sqrt{2}$ D) 4 E) $2\sqrt{2}$

14. En un triángulo ABC se traza la mediana BM, luego se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BM}$ (H ∈ $\overline{BM}$). Si: 2(HM) = BH y m∠HAM = 18°30'; calcula m∠MBC.

A) 30° B) 53° C) 26°30' D) 37° E) 45°

15. En el gráfico, AC = 12. Calcula la distancia de P a $\overline{BQ}$.



A) 2
B) 6
C) 3
D) $4\sqrt{3}$
E) $5\sqrt{3}$

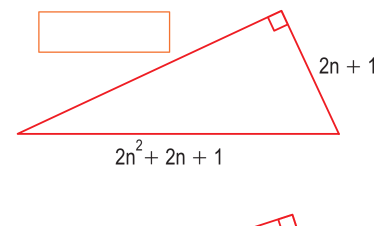
16. En un triángulo ABC se traza la mediana BM; tal que BC = AM. Si: m∠BCA = 37°; calcula m∠ABM.

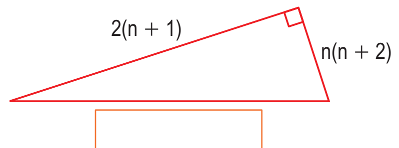
A) 30° B) 37° C) 45° D) 60° E) 30°

NIVEL 2

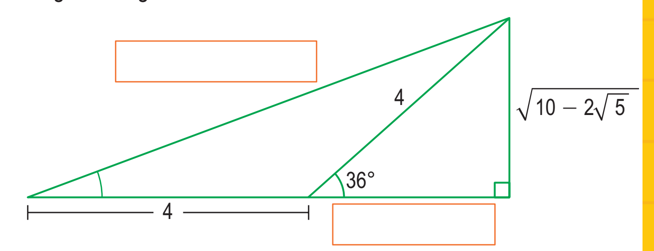
Comunicación matemática

17. Completa las fórmulas restantes para que los triángulos rectángulos sean pitagóricos.



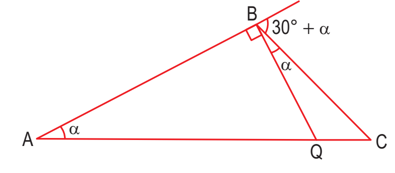


18. Llena los recuadros con los valores correspondientes en la siguiente figura.



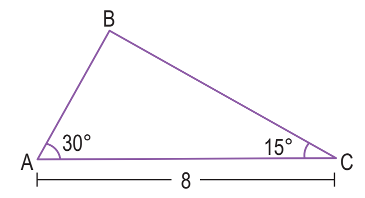
Razonamiento y demostración

19. En el gráfico, BQ = 5. Calcula AC.



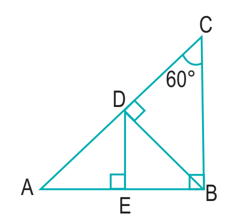
A) 8
B) 10
C) 12
D) 7,5
E) 15

20. En el gráfico, calcula BC.



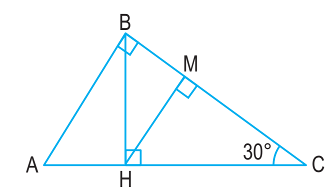
A) 2
B) $3\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}$
E) $4\sqrt{2}$

21. En la figura, AC = 32. Calcula DE.



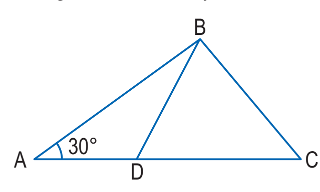
A) 6
B) 7
C) 9
D) 15
E) 12

22. Según la figura, AC = 64 m. Calcula HM.



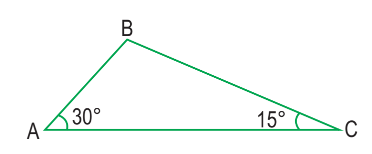
A) 20 m
B) 22 m
C) 24 m
D) 25 m
E) 26 m

23. En la figura, AB = 8 m y BD = BC = 5 m. Calcula DC.



A) 6 m
B) 8 m
C) 7 m
D) 5 m
E) 9 m

24. Si en la figura, AC = 26 m. Calcula BC.



A) 2 m
B) 3 m
C $\sqrt{2}$ m
D) $5\sqrt{2}$ m
E) $13\sqrt{2}$ m

Resolución de problemas

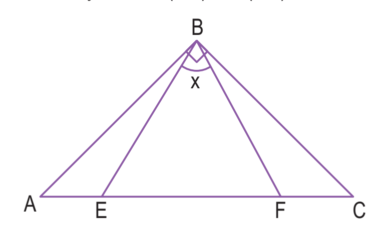
25. En un triángulo ABC, m∠BAC = 2m∠BCA, se traza la ceviana interior BD. Si: AB = 8; BD = 5 y DC = 13. Calcula m∠BAD.

A) 30° B) 53° C) 37°
D) 26°30' E) 33°

26. Dado un triángulo rectángulo ABC recto en B, por C se traza una perpendicular a $\overline{AC}$ que interseca en D a la bisectriz exterior de A. Si BC = 4 y CD = 10. Calcula m∠ACB.

A) 30° B) 45° C) 37° D) 53° E) 60°

27. En la figura,
EB = BF y EF = 2(AE) = 2(FC). Calcula x.

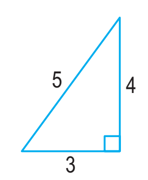


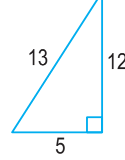
A) 37° B) 53° C) 45° D) 60° E) 72°

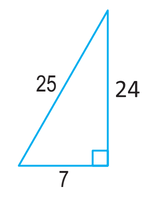
NIVEL 3

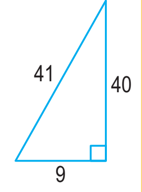
Comunicación matemática

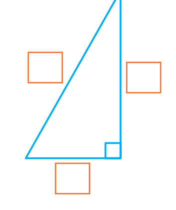
28. Halla los siguientes términos de la serie de triángulos pitagóricos.





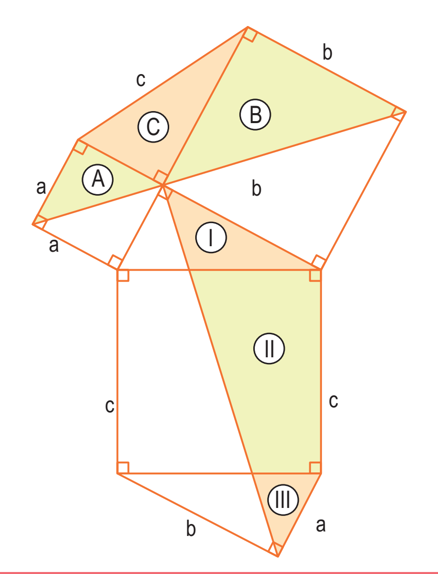






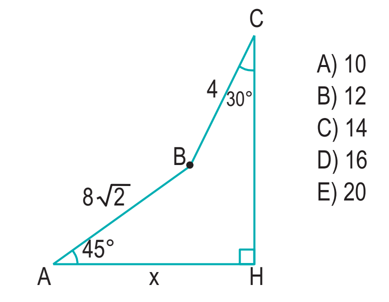
29. Del problema anterior halla una expresión general que permita hallar los lados del enésimo término de la serie de triángulos pitagóricos.

30. Demuestra el teorema de Pitágoras si en el siguiente gráfico se cumple la siguiente relación de áreas:
Ⓐ + Ⓑ + Ⓒ = Ⓘ + Ⓘⓘ + Ⓘⓘⓘ



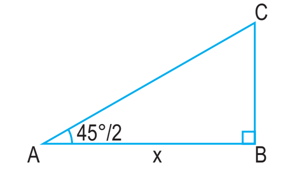
Razonamiento y demostración

31. Calcula x.



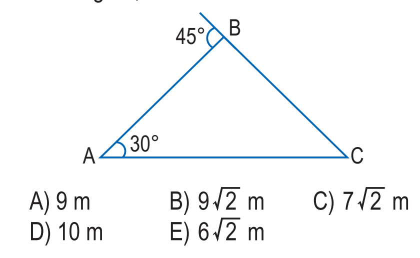
A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 20

32. Halla x, si: $AC = 6\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$



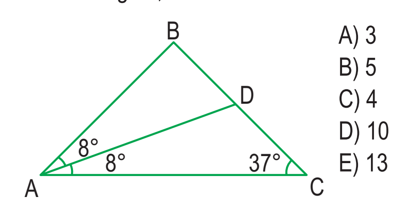
A) $2 + \sqrt{2}$
B) $3\sqrt{6}$
C) $4\sqrt{2}$
D) $2 - \sqrt{2}$
E) 6

33. En la figura, AC = 18 m. Calcula BC.



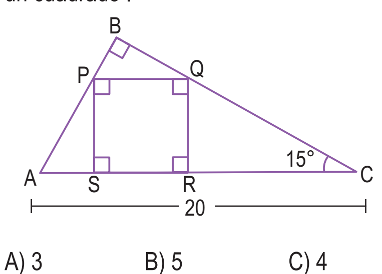
A) 9 m B) $9\sqrt{2}$ m C) $7\sqrt{2}$ m
D) 10 m E) $6\sqrt{2}$ m

34. En la figura, AC = 20. Calcula BD.



A) 3
B) 5
C) 4
D) 10
E) 13

35. Según el gráfico, calcula PQ si PQRS es un cuadrado .



A) 3 B) 5 C) 4
D) 2 E) $4\sqrt{2}$

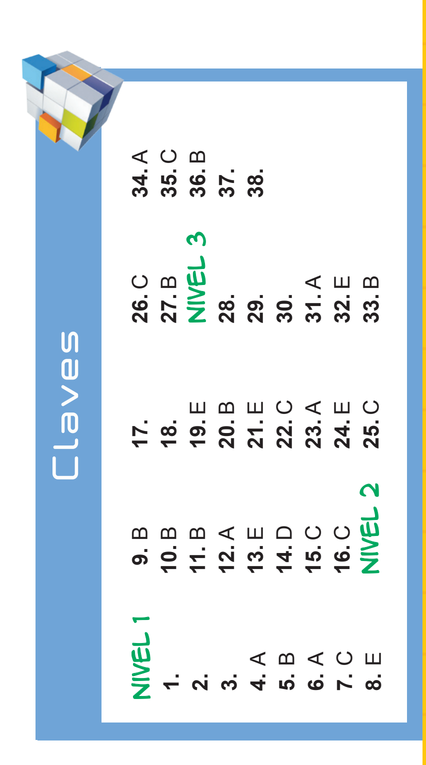
Resolución de problemas

36. Si un bambú de 32 metros de altura ha sido roto por el viento, de tal manera que su extremo superior quedó apoyado en el suelo a una distancia de 16 m de su base, ¿a qué altura del suelo se rompió?

A) 20 m B) 12 m C) 32 m
D) 18 m E) 16 m

37. En un triángulo escaleno ABC se construyen dos cuadrados sobre los lados AB y BC; y se ubican los centros H e I de cada cuadrado respectivamente. Demuestra que los segmentos HM e IM son iguales, si M es el punto medio de AC.

38. Del problema anterior, demuestra que $\overline{HM}$ e $\overline{IM}$ forman un ángulo recto.



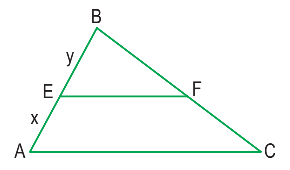


Aplicamos lo aprendido



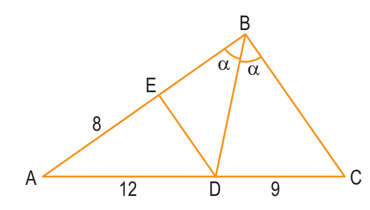
TEMA 3: PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

1 En la figura: AB = 8, BC = 12 y AC = 10. Calcula $\frac{x}{y}$, si el triángulo EBF y el trapecio AEFC tienen igual perímetro.



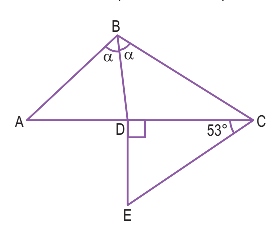
A) 1/2 B) 3/2 C) 2/3 D) 1/3 E) 1/4

2 Calcula BC, si: $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$.



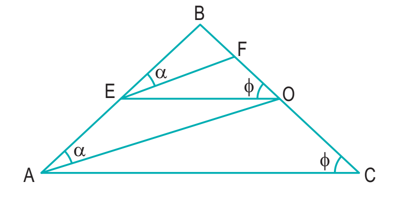
A) 10 B) 10,5 C) 13 D) 11 E) 12

3 Calcula CE, si: AB = 3, BC = 9 y AC = 10.



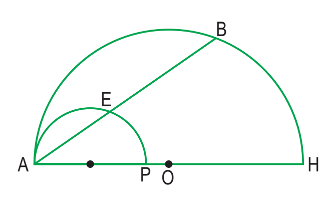
A) 15/4 B) 10 C) 15/2 D) 25/2 E) 25

4 En la figura, BF = 2 y FO = 3. Calcula OC.



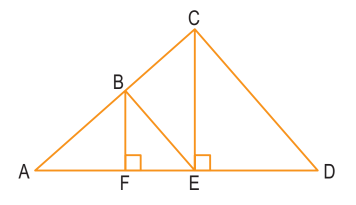
A) 5,5 B) 6,5 C) 7,5 D) 7 E) 6

5 Si: AH = 12 y $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$; calcula PO, siendo $\overline{AH}$ y $\overline{AP}$: diámetros.



A) 1 B) 3 C) 2 D) 1,5 E) 3,5

6 En la figura mostrada, $\overline{BE}$ // $\overline{CD}$, AD = 9 y AE = 6. Halla FE.

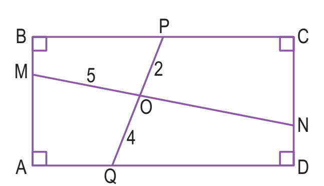


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 2,5

7 En un trapecio las bases miden 2 y 6 y su altura mide 4. Calcula la distancia del punto de intersección de los lados no paralelos a la base mayor.

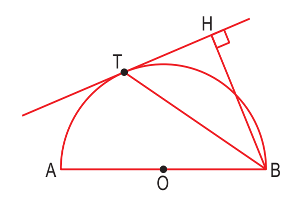
A) 2 B) 5 C) 4 D) 6 E) 8

8 Del gráfico, calcula ON, si: $m\angle OMA = m\angle BPO$, además $AD = 2CD$.



A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

9 Si: O es centro $AB = a$, $BH = b$.
Calcula BT. (T es punto de tangencia).



A) $\dfrac{ab}{(a+b)}$ B) $\dfrac{a+b}{2}$ C) $\sqrt{b(a+b)}$
D) $\sqrt{a(a+b)}$ E) $\sqrt{ab}$

10 En un triángulo ABC, isósceles $AB = BC$; la mediatriz de $\overline{BC}$, corta a $\overline{AC}$ en el punto R. Luego se traza $\overline{RF} \,//\, \overline{BC}$ (F en $\overline{AB}$). Si: $RF = 1$ y $RC = \sqrt{6}$. Halla AB.

A) 3 B) 2 C) 4
D) $2\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

11 Un trapecio ABCD, está inscrito en una circunferencia. Por C, se traza una tangente a la circunferencia, cortando a la prolongación de $\overline{AD}$ en el punto F. Si: $BC = 10$ y $AC = 16$. Halla AF.

A) 24 B) 23 C) 26,5 D) 27,5 E) 25,6

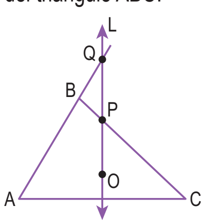
12 En un $\triangle ABC$, $AB = c$; $BC = a$: y $m\angle B = 120°$.
La longitud de la bisectriz interior BD, es:

A) $\sqrt{ac}$ B) $\sqrt{a^2 + c^2}$ C) $\dfrac{a+c}{4}$
D) $\dfrac{2ac}{a+c}$ E) $\dfrac{ac}{a+c}$

13 En un triángulo ABC ($BC = 9$) se trazan la bisectriz AD y la mediana BM que son perpendiculares. Calcula BD.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 6

14 En el siguiente gráfico: $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$; O es el circuncentro del triángulo ABC; además $OP = 8$ y $OQ = 18$. Halla el circunradio del triángulo ABC.



A) 10 B) 12 C) 16 D) 14 E) 20

Claves

1. D 2. B 3. D 4. C 5. B 6. B 7. D 8. C 9. E 10. A 11. E 12. E 13. A 14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

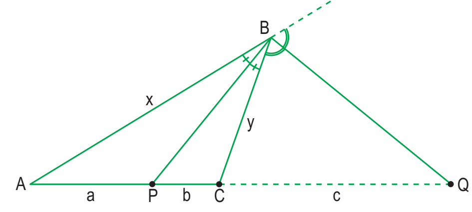
1. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Dos figuras semejantes son necesariamente congruentes. ( )

II. Dos figuras congruentes son necesariamente semejantes. ( )

III. Son elementos homólogos aquellos elementos que cumplen la misma función en dos triángulos semejantes. ( )

2. Relaciona los teoremas y sus expresiones, de acuerdo al siguiente gráfico.

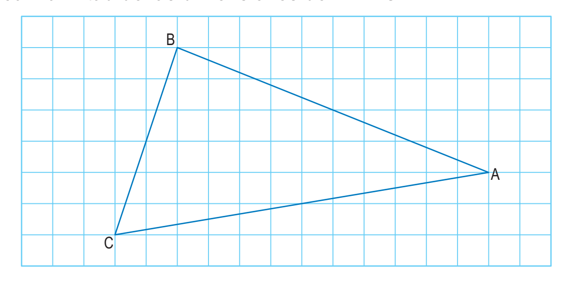


I. Teorema de la bisectriz interior. ( ) $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{c}$

II. Teorema de la bisectriz exterior. ( ) $\frac{a}{b} = \frac{a+b+c}{c}$

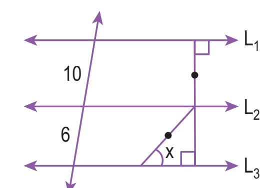
III. Teorema de los bisectrices armónicas. ( ) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

3. Construye un triángulo desde el vértice A y cuyas dimensiones sean la mitad de las dimensiones del $\triangle ABC$.



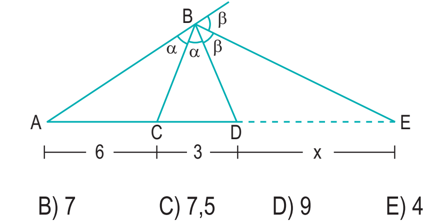
Razonamiento y demostración

4. Calcula x, si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$.



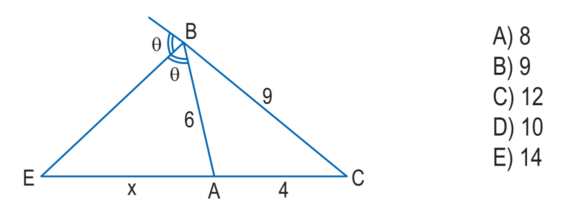
A) 30° B) 37° C) 45° D) 60° E) 15°

5. Del gráfico, calcula x.



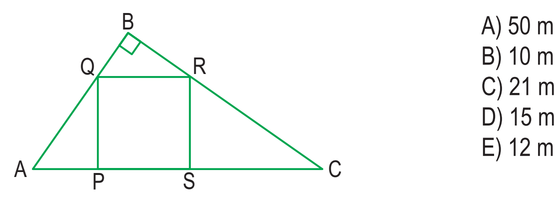
A) 8 B) 7 C) 7,5 D) 9 E) 4

6. Halla x.



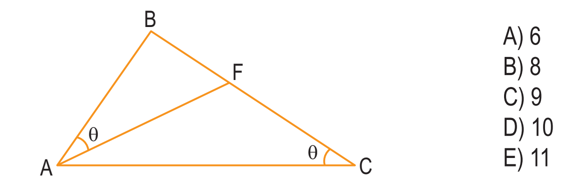
A) 8
B) 9
C) 12
D) 10
E) 14

7. En la figura, PQRS es un cuadrado. Si: AP = 9 m y SC = 16 m. Calcula el lado del cuadrado.



A) 50 m
B) 10 m
C) 21 m
D) 15 m
E) 12 m

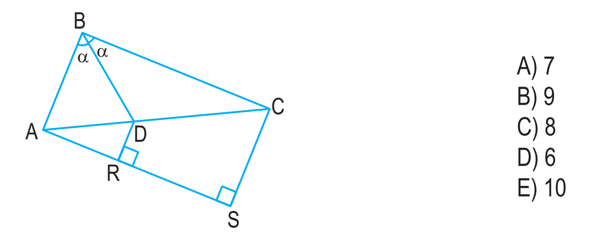
8. En la figura, BF = 4 y FC = 12. Calcula AB.



A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

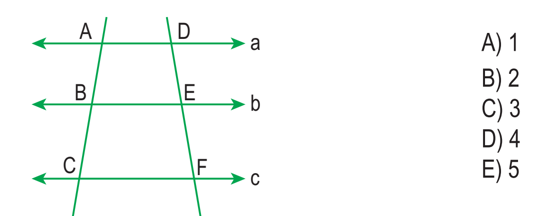
Resolución de problemas

9. Si: $\frac{AB}{5} = \frac{BC}{6}$ y RS = 12, calcula AR.



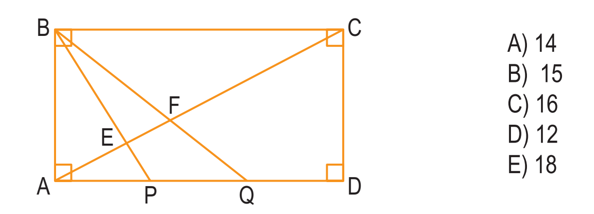
A) 7
B) 9
C) 8
D) 6
E) 10

10. AB = x; BC = x + 2; DE = 10 y EF = 14.
Calcula x si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$.



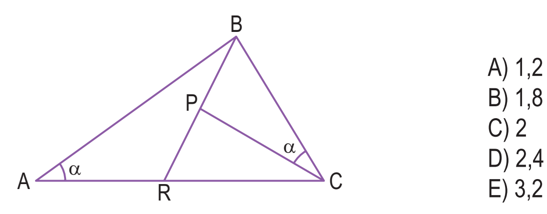
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

11. En la figura ABCD es un rectángulo, AP = PQ = QD.
Si: BD = 40, calcula AF.



A) 14
B) 15
C) 16
D) 12
E) 18

12. Calcula BC, si: AB = 6 y PR = 2(BP), además PC = RC.



A) 1,2
B) 1,8
C) 2
D) 2,4
E) 3,2

NIVEL 2

Comunicación matemática

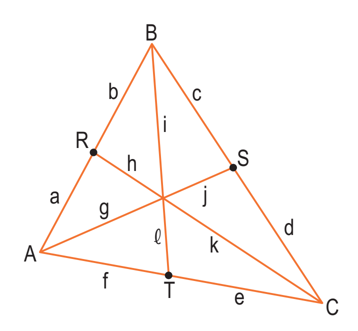
13. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Toda recta transversal a un haz armónico es dividida por este en segmentos que están en proporción armónica. ( )

II. El valor de la razón de la proporción áurea es 1,30667 aproximadamente. ( )

III. El valor de la razón de la proporción cordobesa es 1,61803 aproximadamente. ( )

14. Relaciona los teoremas y sus expresiones de acuerdo al siguiente gráfico.

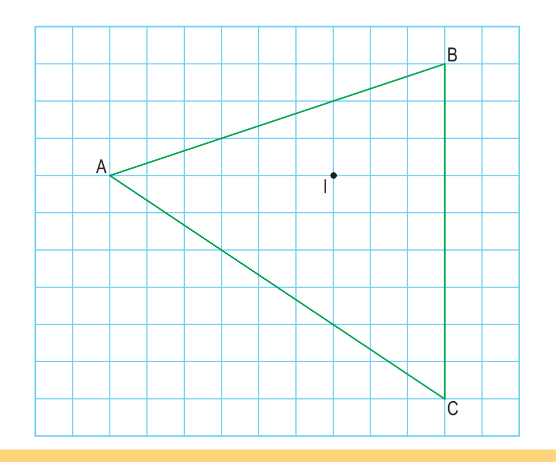


I. Teorema de Ceva ( ) $\frac{\ell}{i}+\frac{j}{g}+\frac{h}{k}=1$

II. Teorema de Van Aubel ( ) ace = bdf

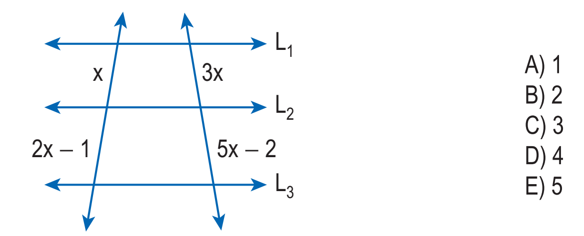
III. Teorema de Gergonne ( ) $\frac{i}{\ell}=\frac{b}{a}+\frac{c}{d}$

15. Construye un triángulo desde el punto interior I y cuyas dimensiones sean la tercera parte de las dimensiones del △ABC.



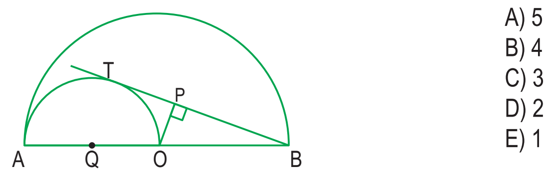
Razonamiento y demostración

16. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2} \,//\, \overleftrightarrow{L_3}$.; halla x.



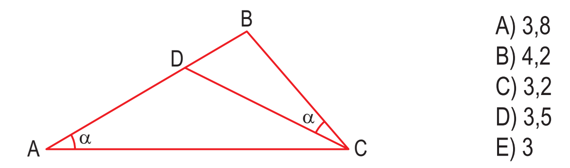
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

17. Si O y Q son centros, PB = 4. Calcula TP (T es punto de tangencia).



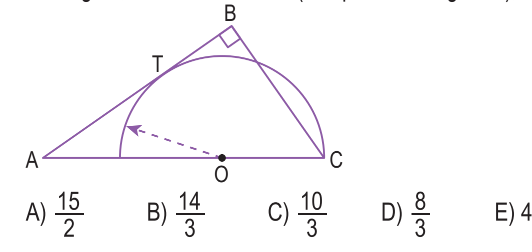
A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

18. En la figura calcula AD, si: AB = 8 y BC = 6.



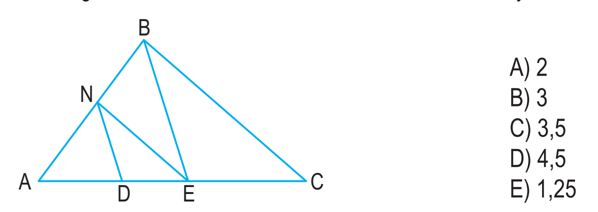
A) 3,8
B) 4,2
C) 3,2
D) 3,5
E) 3

19. En la figura, si AB = 12, BC = 9 (T es punto de tangencia), calcula TB.



A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{14}{3}$ C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 4,5

20. En la figura, calcula EC si: $\overline{DN} \,//\, \overline{BE}$, $\overline{NE} \,//\, \overline{BC}$, AD = 4 y DE = 1.



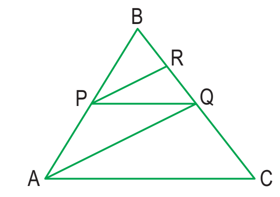
A) 2
B) 3
C) 3,5
D) 4,5
E) 1,25

Resolución de problemas

21. En un triángulo ABC: AB = 10, BC = 18. La bisectriz interior del ángulo B divide a $\overline{AC}$ en dos segmentos cuya diferencia de sus medidas es 6. Calcula AC.

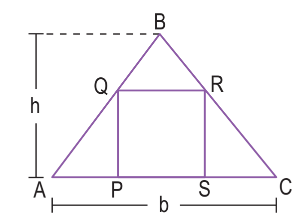
A) 18 B) 24 C) 21 D) 28 E) 27

22. Si: $\overline{PR} \,//\, \overline{AQ}$, $\overline{QP} \,//\, \overline{AC}$, BR = 2, RQ = 3. Calcula QC.



A) 10,5
B) 9,5
C) 8,5
D) 7,5
E) 6,5

23. En la figura, sabiendo que b = 12 m y h = 8 m, calcula el lado del cuadrado PQRS.



A) 5,6 m B) 3,2 m C) 4,8 m
D) 5,1 m E) 8,1 m

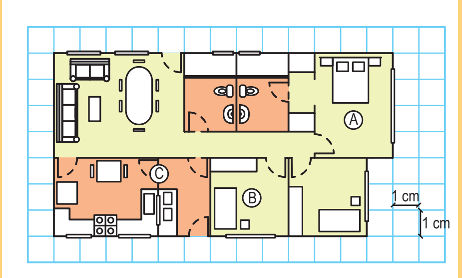
24. Sobre los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC se ubican los puntos P, Q y R, respectivamente, de modo que PBQR es un rombo cuyo lado se pide calcular sabiendo que AB = 4 y BC = 6.

A) 2,2 B) 2,6 C) 2,8
D) 2,4 E) 3,2

NIVEL 3

Comunicación matemática

25. En el siguiente plano de distribución de una casa, halla las áreas de los cuartos A, B y la cocina.



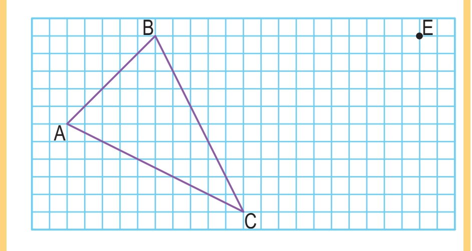
Además 1 cm en el plano equivale a 1 m en tamaño real.

I. Cuarto A: ____

II. Cuarto B: ____

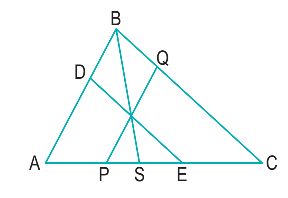
III. Cocina C: ______

26. Construye un triángulo desde el punto exterior E y cuyas dimensiones sean los tres quintas partes de las dimensiones del triángulo ABC.



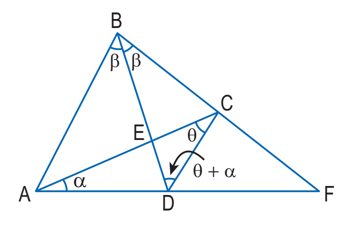
Razonamiento y emostración

27. Si: $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, AP = 8, PS = 6, SE = 5, calcula EC.



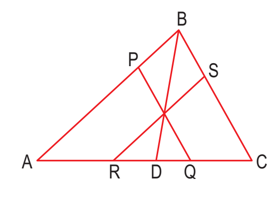
A) $6,\widehat{6}$ B) 6,1 C) 7,2
D) $9,\widehat{6}$ E) 2,7

28. Si: 5DE = 2AD y BC = 12, calcula AB.



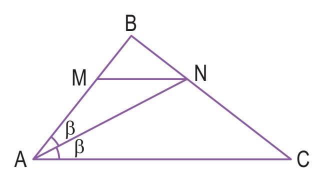
A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

29. Si: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{RS} \parallel \overline{AB}$, AR = 2, RD = 3, QC = 1. Calcula DQ.



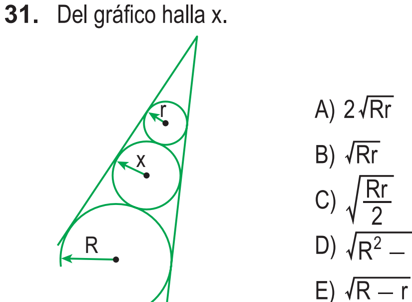
A) 1,5 B) 2 C) 0,75
D) 1,25 E) 1,3

30. En la figura, $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$; AB = 6 m y AC = 14 m. Calcula MN.



A) 7 m B) 3,5 m C) 2,8 m
D) 2,6 m E) 4,2 m

31. Del gráfico halla x.



A) $2\sqrt{Rr}$
B) $\sqrt{Rr}$
C) $\sqrt{\frac{Rr}{2}}$
D) $\sqrt{R^2 - r^2}$
E) $\sqrt{R - r}$

Resolución de problemas

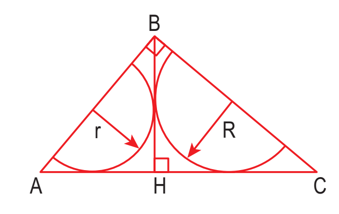
32. En un triángulo ABC, por el baricentro se traza una paralela a $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{BC}$ en E. Si: BE = x + 4 y EC = x – 5, calcula BC.

A) 9 B) 15 C) 18 D) 24 E) 27

33. En un triángulo ABC, AB = 6 y BC = 14. Halla AC, sabiendo que la mediana $\overline{BM}$ y la bisectriz BD, determinan sobre $\overline{AC}$, el segmento MD = 3.

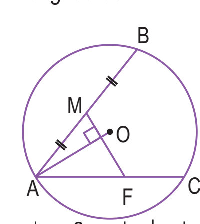
A) 15 B) 18 C) 9 D) 12 E) 14

34. En la figura $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; r y R, son radios de las semicircunferencias tangentes a $\overline{AC}$ y a la altura $\overline{BH}$. (R > r). Halla BH.

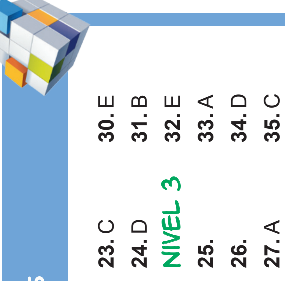


A) $4\sqrt{Rr}$ B) $4\sqrt{R^2r^2}$ C) R – r
D) R + r E) $2\sqrt{R^2 + r^2}$

35. En la figura O es centro de la circunferencia. AM = MB; $\overline{MF} \perp \overline{OA}$. Halla la longitud de $\overline{AB}$.



A) $2\sqrt{ab}$
B) $\sqrt{2a(a + b)}/2$
C) $\sqrt{2a(a + b)}$
D) $\sqrt{b(a + b)}/2$
E) $\sqrt{2b(a + b)}$



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3.
4. B
5. D
6. A
7. E
8. B
9. E
10. E
11. C
12. C

NIVEL 2
13.
14.
15.
16. A
17. D
18. D
19. E
20. E
21. C
22. D
23. C
24. D

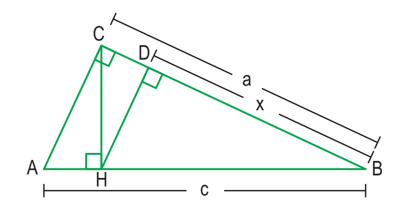
NIVEL 3
25.
26.
27. A
28. D
29. A
30. E
31. B
32. E
33. A
34. D
35. C



Aplicamos lo aprendido

TEMA 4: RELACIONES MÉTRICAS

1 Del gráfico, halla x en función de a y c.



A) $\frac{a^2}{c}$ B) $\frac{a^3}{c^2}$ C) $\frac{c^2}{a}$ D) $\frac{c^3}{a^2}$ E) $\frac{a^4}{c^3}$

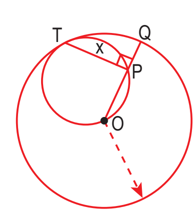
2 Un rectángulo ABCD tiene por base AB = 16 cm. La circunferencia tangente a los lados AB, BC y CD y la circunferencia tangente a los lados CD, DA y AB se intersecan en los puntos M y N. Si la distancia del segmento MN mide 8 cm, la altura del rectángulo es:

A) 12 cm B) 11 cm C) 10 cm D) 9 cm E) 8 cm

3 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 y la altura relativa a la hipotenusa mide 6. Calcula el cateto menor.

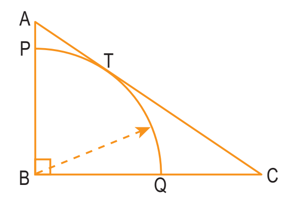
A) $3\sqrt{5}$ B) $6\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

4 En la figura, OP = 24 y PQ = 1. Si O es centro y T es punto de tangencia, calcula x.



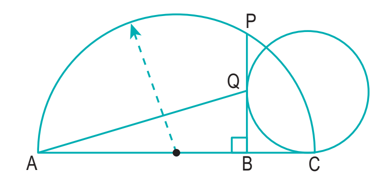
A) 10 B) 9 C) 12 D) 6 E) 7

5 Del gráfico, calcula PQ siendo: AT = 2 y TC = 9.



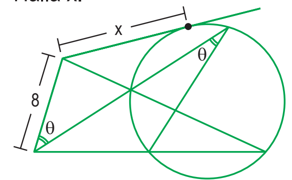
A) 5 B) 6 C) $4\sqrt{2}$ D) 7 E) $6\sqrt{2}$

6 Si Q y C son puntos de tangencia (AB = 4, PQ = 1), calcula AQ.



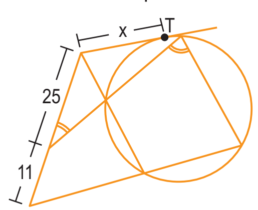
A) 5 B) 7 C) $\sqrt{13}$ D) 6 E) $\sqrt{17}$

7 Halla x.



A) 10 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12

8 Halla x si T es punto de tangencia.



A) 32 B) 30 C) 34 D) 36 E) 38

9 $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a una circunferencia de radio r, de modo que $\overline{PA} \perp \overline{PB}$. Halla r, si un punto del menor arco AB, dista 8 y 9 cm, respectivamente, de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

A) 29 cm B) 17 cm C) 34 cm D) 25 cm E) 30 cm

10 Halla la longitud de la altura de un trapecio, cuyas diagonales miden 6 y 8 cm, siendo perpendiculares entre sí.

A) 9,6 cm B) 2,4 cm C) 6,4 cm D) 4,8 cm E) 5 cm

11 En un $\triangle$ABC, recto en B, la mediatriz de AC corta a $\overline{BC}$ en el punto F. Si: BF = 3 y FC = 5, halla AB.

A) 6 B) 4 C) 8 D) 3 E) 7

12 Se tiene un $\triangle$ ABC, recto en B, tal que AB = 6 y BC = 8. Exteriormente, con $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de diámetros, se dibujan dos semicircunferencias, respectivamente. La longitud del segmento tangente común a estos arcos, mide:

A) $4\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $\sqrt{26}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

13 En un $\triangle$ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior BF. Halla AB, si: AF = 7 y FC = 24.

A) 8,68 B) 9,28 C) 10,28 D) 9,88 E) 10,32

14 En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), se toman los puntos P y Q de los catetos AB y BC, respectivamente. Sea M el punto medio de $\overline{PQ}$ y N el punto medio de $\overline{AC}$, calcula MN si: AP = m y QC = n.

A) $\sqrt{m^2+n^2}/2$ B) m + n C) m – n
D) $\sqrt{m^2-n^2}$ E) $\sqrt{mn}$

Claves

1. B	3. A	5. B	7. D	9. A	11. B	13. A
2. C	4. E	6. E	8. B	10. D	12. E	14. A

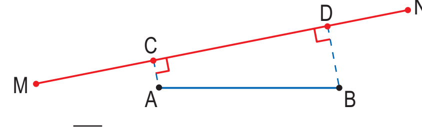


Practiquemos

NIVEL 1

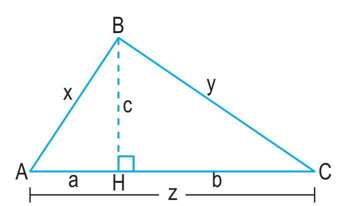
Comunicación matemática

1. Relaciona teniendo en cuenta el siguiente gráfico:



I. $\overline{BD}$	( )	proyectante de B
II. $\overline{CD}$	( )	eje de proyección
III. $\overline{MN}$	( )	proyectante de A
IV. $\overline{AC}$	( )	proyección de $\overline{AB}$

2. Marca las alternativas correctas, teniendo en cuenta el siguiente gráfico:



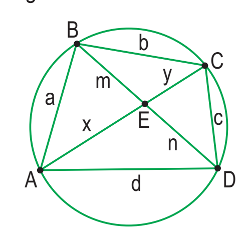
I. Teorema n.° 5 de relaciones métricas en el triángulo rectángulo.

- $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ ☐
- $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ ☐
- $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ ☐

II. Teorema n.° 6 de relaciones métricas en el triángulo rectángulo.

- $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{x}{y}$ ☐
- $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{a}{b}$ ☐
- $\dfrac{c^2}{z^2} = \dfrac{a}{b}$ ☐

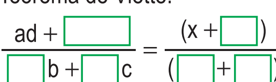
3. Completa los recuadros teniendo en cuenta los valores presentes en el siguiente gráfico.



I. Teorema de Ptolomeo:
(m + ☐) (☐ + y) = ☐c + b☐

II. Teorema de Packein:
☐(bc) = y(☐d)

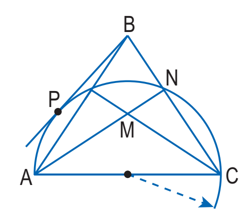
III. Teorema de Viette:



$$\frac{ad + \square}{\square b + \square c} = \frac{(x + \square)}{(\square + \square)}$$

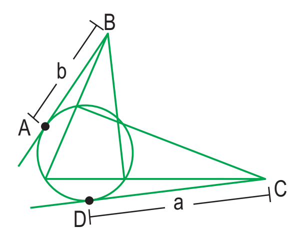
Razonamiento y demostración

4. Calcula BP, si: AM = a, MN = b y AB = AC.



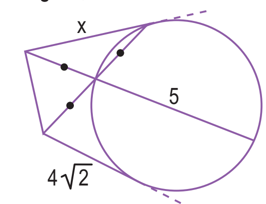
A) $\sqrt{2b(a+b)}$ B) $\sqrt{2a(a+b)}$
C) $\sqrt{b(a+b)}$ D) $\sqrt{a(a+b)}$
E) $\sqrt{a^2+b^2}$

5. Calcula BC.



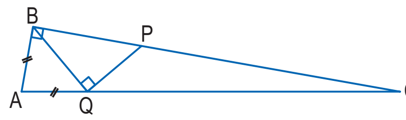
A) a + b B) $\sqrt{a^2+2b^2}$ C) $2\sqrt{ab}$
D) $\sqrt{a^2+b^2}$ E) 2ab

6. En la figura, calcula x.



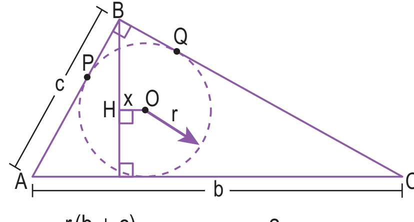
A) 2 B) 6 C) 4 D) 3 E) 5

7. En el gráfico: BP = 1 y PC = 4, calcula PQ.



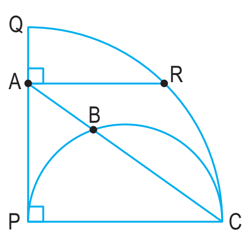
A) 1/4 B) 2/3 C) 2 D) 2/5 E) 3/2

8. Del gráfico, calcula x, si P y Q son puntos de tangencia:



A) $\dfrac{r(b+c)}{2}$ B) $\dfrac{2r}{b+c} - c$
C) $\dfrac{c(b-c)}{b} - r$ D) $\dfrac{r(b+r)}{c} + b$
E) $\dfrac{c(b+r)}{b} - r$

9. Del gráfico, $m\overset{\frown}{QR} = m\overset{\frown}{RC}$, calcula $\dfrac{AB}{BC}$.



A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

Resolución de problemas

10. En el interior de un paralelogramo ABCD se ubica al punto P, tal que $(PB)^2 + (PD)^2 = 43$ y $(PA)^2 + (PC)^2 = 75$; si: $m\angle ABD = 90°$; calcula AB.

A) $\sqrt{15}$ B) 4 C) $4\sqrt{15}$
D) $5\sqrt{3}$ E) 3

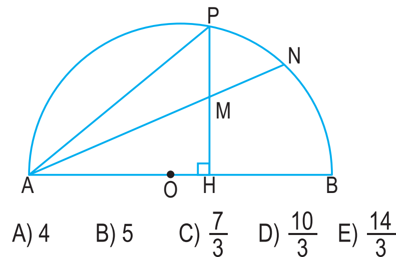
11. En un triángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AP y en el triángulo ABP se traza la altura BH. Se ubica en $\overline{AC}$ el punto Q, tal que el cuadrilátero ABHQ es un trapecio isósceles.
Si: PH = 6,75 y AH = 12, calcula QC.

A) 13,5 B) 16 C) 12,75 D) 9,6 E) 8

12. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), la altura relativa a la hipotenusa es igual a 21,6. La proyección del punto medio de uno de los catetos sobre la hipotenusa determina sobre ésta dos segmentos cuya diferencia de cuadrados es igual a 729. Si la longitud del mismo cateto es igual a "b" y de la hipotenusa es "a", calcula a + b.

A) $3\sqrt{6}$ B) 27 C) 81
D) 28 E) 42,75

13. Si AP = 8; AM = 6 y AB es diámetro, calcula MN.



A) 4 B) 5 C) $\dfrac{7}{3}$ D) $\dfrac{10}{3}$ E) $\dfrac{14}{3}$

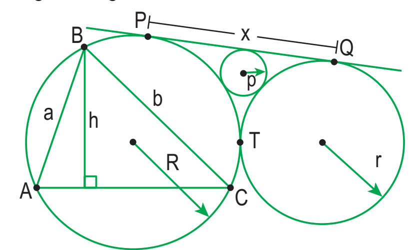
14. Se tienen dos circunferencias secantes en los puntos P y Q. Por un punto A de la circunferencia menor se traza una tangente que corta a la otra circunferencia en los puntos B y C. La prolongación de $\overline{PQ}$ corta a la tangente en N. Halla AN, si NB = 3 y BC = 9.

A) 27 B) 6 C) 18 D) 13,5 E) 9

NIVEL 2

Comunicación matemática

15. Coloca V (verdadero) o F (falso), según corresponda teniendo en cuenta el siguiente gráfico:



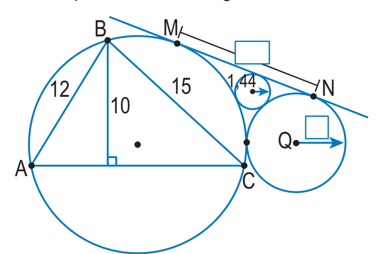
I. $x = \sqrt{2Rr}$ ( )

II. $ab = 2hR$ ( )

III. $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$ ( )

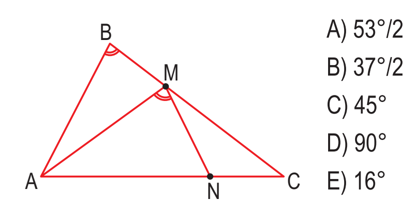
IV. $Rr = p(R + r + 2\sqrt{Rr})$ ( )

16. Completa los espacios en blanco con valores numéricos, teniendo en cuenta los valores presentes en el gráfico:



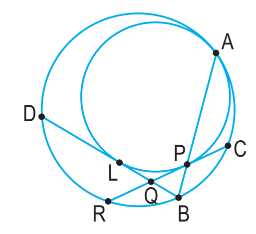
Razonamiento y demostración

17. En el gráfico, calcula m∠ABM, si AB = MC y m∠NMC = m∠MAN. Además se cumple que: $(MC)^2 + (NC)^2 = (AM)^2$



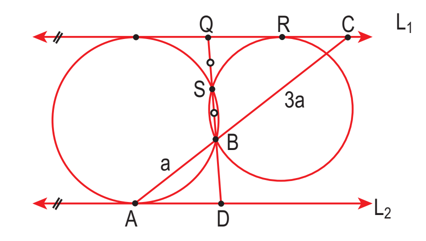
A) 53°/2
B) 37°/2
C) 45°
D) 90°
E) 16°

18. Del gráfico $m\overset{\frown}{LP}$ = m∠APC; calcula RQ. Si: LQ = 1 y QB = 1/2; donde L y P son puntos de tangencia.



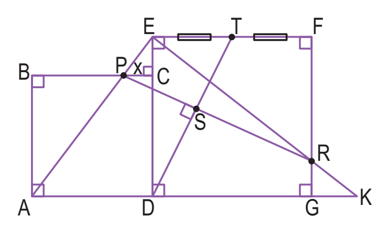
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

19. Calcula $\frac{PQ}{RC}$, donde A, P y R son puntos de tangencia:



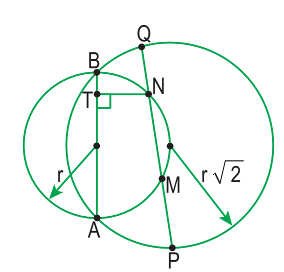
A) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{7}+1}{6}$
E) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

20. En la figura m∠AEK = 90°, y S es punto medio de $\overline{DT}$. Calcula x, si: DS = 6 cm (ABCD y DEFG son cuadrados).



A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm B) $\sqrt{3}$ cm
C) 3 cm D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm
E) 2 cm

21. Del gráfico, calcula AB, si: (PN)(NQ) = 18 y NT = 2.



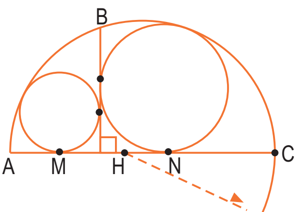
A) $3\sqrt{2}$ B) 6 C) 9
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{27}$

Resolución de problemas

22. Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo, cuyo perímetro es igual 24. La altura relativa a la hipotenusa mide 4,8.

A) 5 y 12 B) 3 y 4 C) 6 y 8
D) 7 y 9 E) 5 y 8

23. En la figura AB = 12 y BC = 16; calcula MN.



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

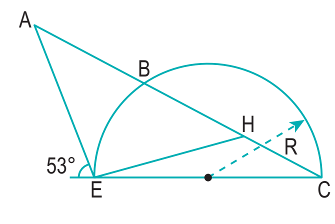
24. ABCD es un cuadrado, se prolonga $\overline{AD}$ hasta E y tomando como diámetro a $\overline{AE}$ se traza una circunferencia que interseca a $\overline{CD}$ en H. Desde C se traza la tangente $\overline{CT}$ a dicha semicircunferencia. Si HD = 6, calcula $AH^2 - CT^2$.

A) 144 B) $12\sqrt{2}$ C) 36
D) 18 E) 72

25. En un triángulo calcula el cuadrado de la distancia del incentro al circuncentro. Siendo R (circunradio) y r (inradio).

A) R(R + 2r) B) R(R – r)
C) R(R – 2r) D) R(R + r)
E) R(2R – r)

26. En la figura, EH = AE, R = 5 y (HB)(AC) = 91. Calcula AE.

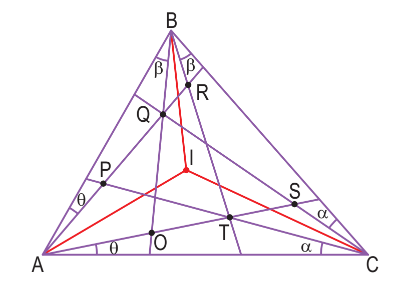


A) $3\sqrt{6}$ B) 4 C) 7
D) 6 E) 9

NIVEL 3

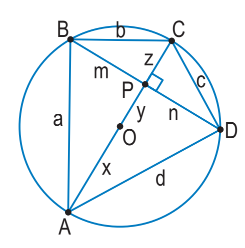
Comunicación matemática

27. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda y teniendo en cuenta el siguiente gráfico (I es incentro del ∆ABC).



I. R es el conjugado isogonal de O ( )
II. P es el conjugado isogonal de S ( )
III. Q es el conjugado isogonal de T ( )

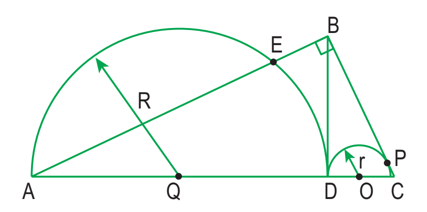
28. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda y teniendo en cuenta el siguiente gráfico. ("O" es centro)



I. $ac + bd = (x + y + z)(m + n)$ ( )
II. $(x + y)ad = z(bc)$ ( )
III. $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ( )
IV. $b^2 + d^2 = (x + y + z)^2$ ( )

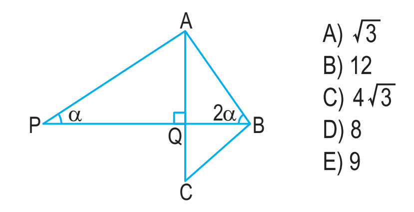
Razonamiento y Demostración

29. Calcula $\frac{BD}{R}$; si $6r = R$; además D y P son puntos de tangencia.



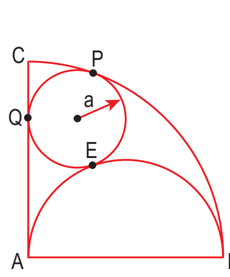
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{13}{12}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{2}{3}$

30. Calcula AC, si se cumple que: $PB - AB = 2\sqrt{(AB)^2 - (QC)^2}$
Además $m\angle ABQ = 2m\angle APB$ y $QC = 6$



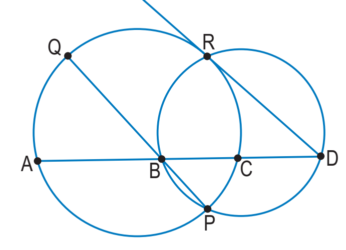
A) $\sqrt{3}$
B) 12
C) $4\sqrt{3}$
D) 8
E) 9

31. Calcula AE, si: P, Q y E son puntos de tangencia:



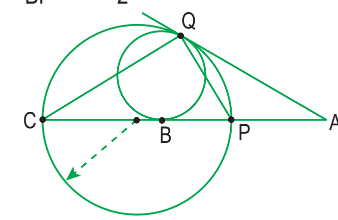
A) $\frac{4}{7}a$
B) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$
C) $\frac{4}{3}a$
D) $\frac{3a}{2}$
E) $\frac{4}{3}\sqrt{3}a$

32. Calcula $\overline{PD}$; si $AB = 7$, $BC = 1$ y $CD = 2$, tal que $\overline{QP} \parallel \overline{RD}$ y además R es punto de tangencia.



A) 3/2 B) $\sqrt{5}/3$ C) $9\sqrt{2}/5$
D) 2 E) $\sqrt{2}$

33. Si: $\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$; calcula $m\angle QCA$.



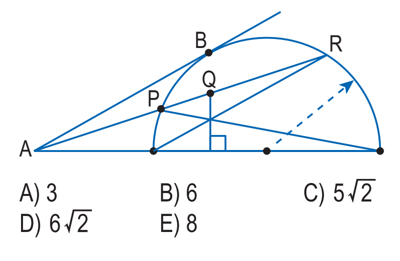
A) 60° B) 45° C) 30° D) 53° E) 16°

Resolución de problemas

34. En una circunferencia se inscribe el triángulo ABC, donde se trazan las alturas AP y BM (H: ortocentro). Si $HP = a$ y $HM = b$, calcula $(AM)(MC) - (BP)(PC)$ sabiendo que $b > a$.

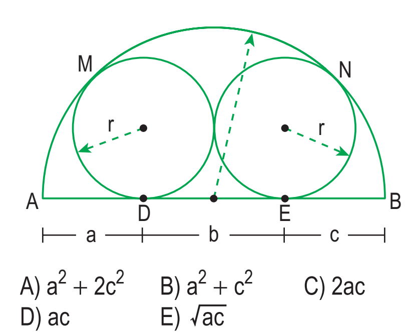
A) $a^2 + b^2$ B) $b^2 - a^2$ C) ab
D) $\frac{ab}{2}$ E) $\frac{ab}{3}$

35. En la figura $PQ = 2$; $QR = 4$ y B es punto de tangencia. Calcula AB.



A) 3 B) 6 C) $5\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$ E) 8

36. Del gráfico, calcula b^2; en función de a y c, $m\overset{\frown}{MN} = 90°$.

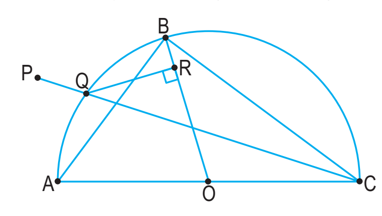


A) $a^2 + 2c^2$ B) $a^2 + c^2$ C) 2ac
D) ac E) $\sqrt{ac}$

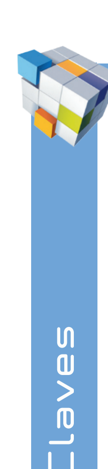
37. En un triángulo ABC, donde H es ortocentro O es circuncentro. Halla la longitud de la mediana CM; si las distancias de H y O al lado AB son 2 m y 6 m respectivamente, además HO = 5 m.

A) $\sqrt{205}$ m B) 13 m C) $\sqrt{209}$ m
D) 15 m E) 17 m

38. De la figura, P es el exentro del triángulo ABC. Calcula QC,
si: $PQ = 6$ y $BR = 3$ (O es centro).



A) $\sqrt{8}$ m B) 12 m C) 9 m
D) $6\sqrt{3}$ m E) $6\sqrt{2}$ m



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3.
4. A
5. D
6. B
7. B
8. C
9. E
10. B
11. B
12. C
13. E
14. B

NIVEL 2
15.
16.
17. D
18. E
19. A
20. A
21. C
22. C
23. D
24. E
25. C
26. C

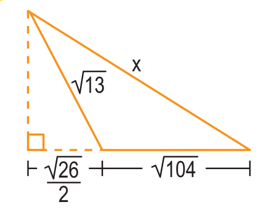
NIVEL 3
27.
28.
29. D
30. B
31. E
32. E
33. C
34. B
35. D
36. C
37. A
38. D






TEMA 5: RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1 En el gráfico, halla x.



A) 12 B) 13 C) 11 D) 14 E) 10

2 En un triángulo de lados 4; 13 y 15; se han trazado la altura y la mediana relativas al lado mayor. Halla la distancia entre el pie de la altura y el pie de la mediana.

A) 5,5 B) 5 C) 5,2 D) 5,3 E) 5,1

3 En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 8, las diagonales AC y BD miden 10 y $2\sqrt{31}$, respectivamente. Calcula AD.

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

4 En un triángulo ABC; AB = 5, BC = 7 y AC = 6. Calcula la medida de la mediana relativa al lado AC.

A) $2\sqrt{7}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $7\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{3}$

5 En un triángulo ABC, se cumple que: $(BC)^2 + (AC)^2 = 100$ y AB = 8, halla la medida de la mediana CQ.

A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{34}$ C) $\sqrt{71}$ D) $\sqrt{51}$ E) $\sqrt{32}$

6 Los lados de un triángulo miden 5; 6 y 7. Halla la altura relativa al lado que mide 6.

A) $\sqrt{6}$ B) $4\sqrt{7}$ C) $5\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{6}$

7 En un $\triangle ABC$, se cumple: $BC^2 = AC^2 + AB^2 + \sqrt{3}(AC)(AB)$. Entonces el ángulo A mide:

A) 120° B) 150° C) 135° D) 165° E) 60°

8 En un trapecio ABCD, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; AB = 5, BC = 6, CD = 7 y AD = 11. La proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AD}$ mide:

A) 1 B) 0,1 C) 0,2 D) 0,125 E) 0,375

9 En un $\triangle ABC$, la bisectriz interior AF corta a la ceviana $\overline{BE}$ en el punto P. Halla AP, si: AB = 6, BF = 3, AE = 4 y $m\angle ABP = m\angle C$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 4 E) 5

10 En un $\triangle ABC$, el ángulo A es agudo, AB = 3, AC = 5. El máximo valor entero de $\overline{BC}$, es:

A) 7 B) 5 C) 3 D) 6 E) 8

11 Las longitudes de los lados de un triángulo obtusángulo, son tres números enteros y consecutivos. El perímetro del triángulo, es:

A) 6 B) 12 C) 15 D) 21 E) 9

12 Se tiene un $\triangle ABC$ donde la medida del ángulo A es el doble de la medida del ángulo C. Si AB = 4 y BC = 7, calcula: AC

A) $\frac{33}{4}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

13 En un triángulo cuyas longitudes de sus lados son proporcionales a los números 4; 5 y 6, la longitud de la menor bisectriz es 10. Calcula la longitud del menor lado.

A) 8 B) 9 C) 12 D) 6 E) 10

14 En un trapecio ABCD, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; AB = 21, BC = 12, CD = 13 y AD = 26. Halla la distancia entre los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

A) 16 B) 14 C) 15 D) 7 E) 13

Claves

1. B	3. B	5. B	7. B	9. C	11. E	13. C
2. E	4. A	6. E	8. B	10. B	12. A	14. A

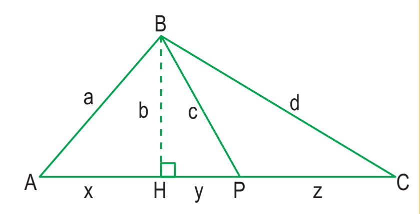
Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Marca las alternativas correctas teniendo en cuenta el siguiente gráfico:



I. Teorema de Euclides (ángulo agudo)

$a^2+(x+y+z)^2-2(x+y+z)x=d^2$ $\square$

$c^2=a^2+(x+y)^2-2(x+y)x$ $\square$

$d^2=b^2+(y+z)^2-2(x+z)y$ $\square$

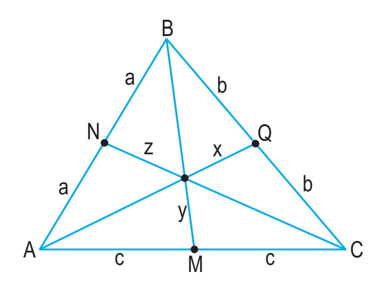
II. Teorema de Euclides (ángulo obtuso)

$d^2=c^2+z^2+2(y+z)z$ $\square$

$c^2=b^2+y^2+2xy$ $\square$

$d^2=c^2+z^2+2zy$ $\square$

2. Rellena los espacios en blanco con los valores presentes en el siguiente gráfico:



I. $3\left(\square^2+\square^2+\square^2\right)=\square^2+\square^2+\square^2$

II. $\frac{1}{3}\left(\square^2+\square^2+\square^2\right)=\square^2+\square^2+\square^2$

III. $4\square^2c-9\square^2c=4\square^2c-2\square^3$

3. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda y teniendo en cuenta el siguiente gráfico.

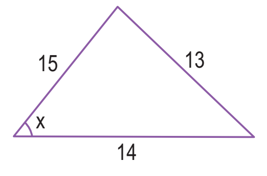
I. El teorema de Herón también se cumple en triángulos obtusángulos. ( )

II. El teorema de Apolonio nos permite calcular la ceviana de un triángulo. ( )

III. El teorema de Packein solo se cumple en triángulos rectángulos. ( )

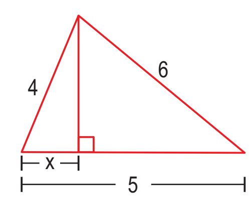
Razonamiento y demostración

4. En la figura, calcula x.



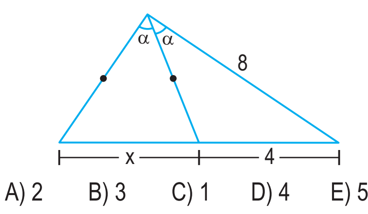
A) 30° B) 37° C) 53° D) 60° E) 45°

5. En la figura, calcula el valor de x.



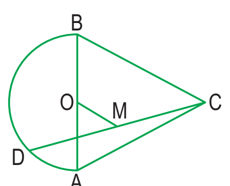
A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 1/3

6. Calcula el valor de x.



A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 5

7. En la figura: $AB=BC=AC=2\sqrt{5}$, O es centro y DM = MC = 3. Calcula OM.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4/5 E) 3/2

Resolución de problemas

8. En un $\triangle ABC$, AB = 3 y BC = 7. Halla el máximo valor entero de AC, sabiendo que el ángulo B es agudo.

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

9. En un trapecio las bases miden 12 y 26 y los lados no paralelos miden 13 y 15. Calcula la longitud de la altura de dicho trapecio.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

10. Si en un triángulo ABC, se cumple que: $BC^2=AC^2+AB^2+\sqrt{2}(AC)(AB)$.
Halla $m\angle BAC$.

A) 45° B) 60° C) 120°
D) 135° E) 105°

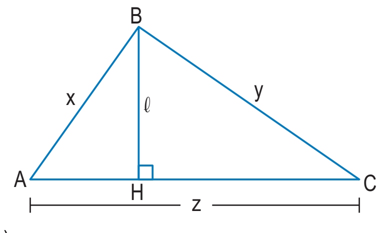
11. En un paralelogramo ABCD: AB = 3, BC = 5 y AC = 7. Calcula la $m\angle A$.

A) 30° B) 53° C) 45° D) 60° E) 75°

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Según el gráfico, coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

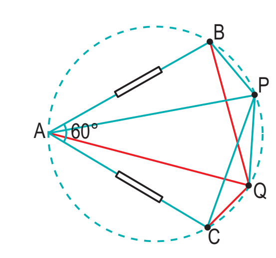


I. ( )
$\ell=\frac{1}{2z}\sqrt{(x+y+z)(x+y)(x+z)(z+y)}$

II. ( )
$\ell=\frac{1}{2z}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}$

III. ( )
$\ell=\frac{1}{2xy}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}$

13. Según el gráfico, coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:



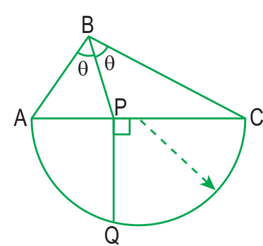
I. BQ + QC = AQ ( )

II. BP + PQ = AP ( )

III. AP = BP + PC ( )

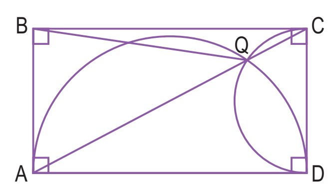
Razonamiento y demostración

14. De la figura calcula BP; si: (AB)(BC) = 32 y BP = PQ.



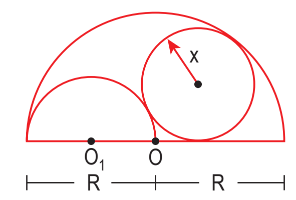
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

15. Si: AQ = 9 y QC = 4, calcula BQ.



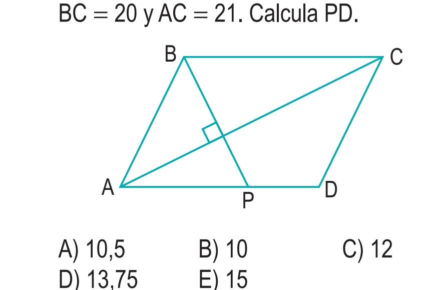
A) $2\sqrt{61}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{13}$
D) $\sqrt{61}$ E) 10

16. En la figura, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia si el radio de la semicircunferencia mide 9?



A) 1 B) 5 C) 4 D) 6 E) 4,5

17. En el romboide ABCD, donde AB = 13; BC = 20 y AC = 21. Calcula PD.



A) 10,5 B) 10 C) 12
D) 13,75 E) 15

Resolución de problemas

18. Se tiene un triángulo ABC tal que: AB = BC = 2AC. Si la distancia de B a la bisectriz interior del ∠A mide $\sqrt{6}$. Calcula AC.

A) 1 B) $\sqrt{6}$ C) 2 D) 3 E) 4

19. La circunferencia inscrita en un triángulo ABC, es tangente a $\overline{AC}$ en D. Calcula BD, si: AB = 5; BC = 7; AC = 6.

A) 5,5 B) 4,5 C) 6 D) 5 E) 4

20. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se toma un punto F de $\overline{AC}$. Halla AB; si: (AF)(FC) = 20, BF = 8.

A) 8,5 B) 9,75 C) 9,16
D) 10,2 E) 7,2

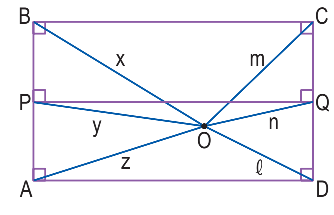
21. Los lados de un triángulo ABC miden: AB = 13, BC = 20 y AC = 21. Calcula la distancia del baricentro al lado AC.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) $\sqrt{20}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

22. Rellena lo recuadros en blanco con los valores presentes en el gráfico siguiente:



I. $\square^2 + n^2 = y^2 + \square^2$

II. $x^2 + \square^2 = \square^2 + m^2$

III. $\square^2 + \square^2 = z^2 + m^2$

23. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

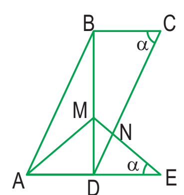
I. La naturaleza de un triángulo depende de los ángulos internos del mismo. ( )

II. El teorema de Chadú solo se cumple para cuadriláteros inscriptibles. ( )

III. El teorema de Carnot solo se cumple para triángulos acutángulos. ( )

Razonamiento y demostración

24. Siendo ABCD un romboide, MB = MD, MN = 1 y AD = DE = 3, calcula: $K = 4(AM)^2 + (BD)^2$.



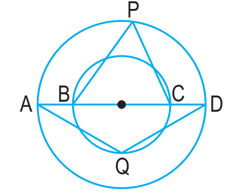
A) 85
B) 95
C) 80
D) 90
E) 92

25. En el gráfico calcula MN, si: O y O_1 son centros; AN = 3 y NB = 5.

M
O
O_1
A
N
B

A) 5,5
B) 6,5
C) 7,5
D) 6
E) 7

26. En la figura se muestra dos circunferencias concéntricas, si: $AQ^2 + QD^2 = 100$, calcula $PB^2 + PC^2$.



A) 10
B) 120
C) 100
D) 81
E) 64

Resolución de problemas

27. La suma de los cuadrados de los lados de un triángulo escaleno es 28. Halla la suma de los cuadrados de las 3 medianas.

A) 28 B) 21 C) 35 D) 24 E) 14

28. Se tienen dos circunferencias concéntricas de radios r y R (R > r), la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera de una de las circunferencias a los extremos de un diámetro de la otra es igual a k. Halla k.

A) 2Rr B) $2R^2$
C) $2(R^2 + r^2)$ D) 4Rr
E) $R^2 + r^2$

29. La suma de los cuadrados de las medianas de un triángulo es 81. Halla la suma de cuadrados de los lados.

A) 108 B) 144 C) 100
D) 112 E) 116

30. En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas AH y CQ. Si: (AB) . (AQ) = 24; CB . CH = 25. Calcula AC.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

31. En un triángulo ABC se tiene que: $(AB)^2 + (BC)^2 + (AC)^2 = 9\ cm^2$; halla la distancia del circuncentro al baricentro si su circunradio mide 3 cm.

A) $\sqrt{3}$ cm B) $2\sqrt{2}$ cm C) 1 cm
D) 2 cm E) $2\sqrt{3}$ cm

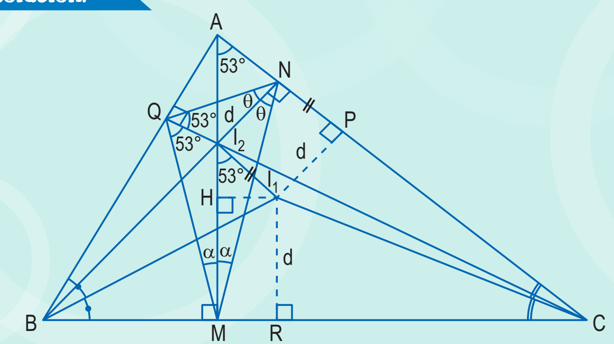
Claves

NIVEL 1	7. A	13.	20. C	26.	
1.	8. D	14. D	21. C	27. B	
2.	9. C	15. D	NIVEL 3	28. C	
3.	10. D	16. C	22.	29. A	
4. C	11. D	17. D	23.	30. C	
5. A	NIVEL 2	18. C	24.	31. B	
6. B	12.	19. D	25.		

MARATÓN Matemática

En un $\triangle ABC$ de incentro I_1, se ubica el incentro I_2 de su triángulo órtico MNQ (M en $\overline{BC}$ y N en $\overline{AC}$), donde $\overline{AC} // \overline{I_1I_2}$.
Calcula I_1I_2, si $m\angle MQN = 106°$ y la diferencia de las distancias de I_2 a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente es 3.

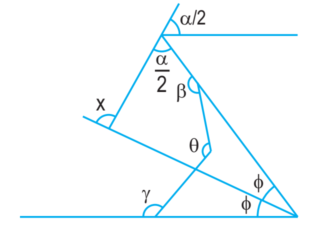
Resolución:



Primero construimos un triángulo ABC tal que $\overline{I_2I_1} // \overline{AC}$.
Del dato $m\angle MQN = 106°$
Como $\overline{QI_2}$ es bisectriz del triángulo MQN $\Rightarrow$ $m\angle MQI_2 = m\angle I_2QN = 53°$.
De la gráfica, el cuadrilátero AQI_2N es inscriptible.
$\Rightarrow$ $m\angle I_2QN = m\angle I_2AN = 53°$
Del dato $\overline{AC} // \overline{I_1I_2}$:
$m\angle I_2AN = 53°$ $\Rightarrow$ $m\angle HI_2I_1 = 53°$
De la gráfica:
- Por paralelismo: $I_1P = I_2N = d$
- Por proyección: $I_1R = HM = d$

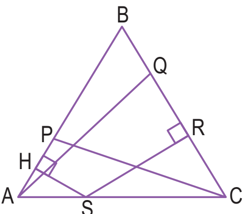
Por dato: $I_2M - I_1N = 3$
$\Rightarrow$ $I_2H + HM - I_2N = 3$ $\Rightarrow$ $I_2H + d - d = 3$ $\Rightarrow$ $I_2H = 3$
Nos piden I_1I_2:
El $\triangle I_2HI_1$, por ser un triángulo notable de 53° con lado $I_2H = 3$
$\Rightarrow$ $I_1I_2 = 5$

1. De la figura, $\alpha + \beta + \theta + \gamma = 540°$. Halla x.



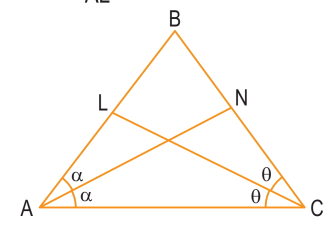
A) 81° B) 100° C) 90° D) 74° E) 60°

2. De la gráfica, AB = BC, AH = HP, CR = RQ y AQ = 7. Calcula PC.



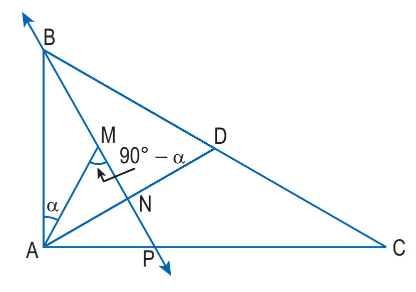
A) 3 B) 4 C) 10 D) 7 E) 3.5

3. Si AN = LC, calcula: $\frac{NC}{AL}$



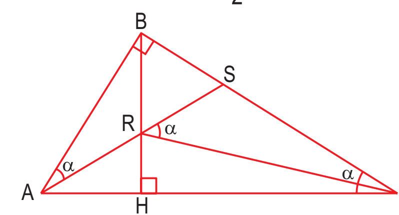
A) 1/2 B) 1 C) 3/2 D) 2 E) 5/2

4. De la gráfica, AB = DC y MN = NP; si $\overleftrightarrow{BP}$ es mediatriz de $\overline{AD}$, calcula α.



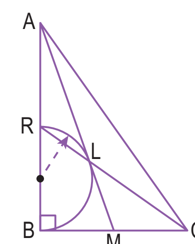
A) 60 B) 45° C) 30° D) 15° E) 22,5°

5. Según la figura, $BS + \frac{AB}{2} = RC$. Calcula α.



A) 53°/2
B) 37°/2
C) 127°/2
D) 127°/4
E) 143°/4

6. De la gráfica, B y L son puntos de tangencia y BR = AR. Halla $\frac{AB}{AC}$.



A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. En un triángulo ABC isósceles, donde la base es $\overline{AC}$, se trazan las bisectrices interiores AM, BL y exterior CN. Calcula la $m\angle MLN$

A) 217° B) 210° C) 180° D) 120° E) 90°


Unidad 2
Geometría

RECUERDA

Galileo [1564-1642]

Astrónomo y físico italiano nacido en Pisa y fallecido en Arcetri. Aunque universalmente conocido por su primer nombre, en realidad se llamaba Galileo Galilei. Curiosamente nació tres días antes de la muerte de Miguel Ángel. Estaba predestinado por su padre para ser médico hasta que escuchó una conferencia sobre geometría y se dedicó al estudio de las matemáticas y las ciencias. Rápidamente se dedicó a observar, medir y mirar todos los objetos cuantitativamente para descubrir alguna relación matemática que permitiera describir el fenómeno con mayor simplicidad. Entre sus experimentos más famosos destacan el estudio del péndulo, estudios sobre termometría, trayectorias de proyectiles, planos inclinados, estudios sobre el movimiento continuo y resistencia de materiales.

Galois Evaristo [1811-1832]

Matemático francés nacido y fallecido en París. Su vida, corta, pero plena de activas luchas políticas y un interés apasionado por los estudios matemáticos, representa un vivo ejemplo de cómo, en la actividad de un hombre dotado, las premisas acumuladas en la ciencia se transforman en una etapa cualitativamente nueva de su desarrollo. Cuando comenzó a asistir a la escuela, mostró poco interés por el latín, el griego y el álgebra, pero se sintió inmediatamente fascinado por la geometría de Legendre. Más tarde estudió con aprovechamiento álgebra y análisis en las obras de maestros tales como Lagrange y Abel, pero su trabajo rutinario de clase en matemáticas fue siempre mediocre, y sus profesores lo consideraron como un muchacho rutinario de clase de matemáticas. A los 16 años Galois sabía ya lo que sus maestros no habían logrado descubrir, que era un genio para las matemáticas. A los 17 años desarrolló sus escritos fundamentales en un artículo que envió a Cauchy, artículo que este último perdió. Por sus fuertes ideas republicanas y revolucionarias fue encarcelado dos veces, y apenas obtenida la libertad, murió en un desafío cuando aún no había cumplido los veintiún años. No obstante su prematura muerte, Galois se reveló como un griego de primer orden. Su obra principal es la teoría que él llamó de las ecuaciones algebraicas; como Galois expuso su teoría de forma muy concisa, tardó mucho tiempo en ser conocida, pero hoy es la parte esencial de todos los manuales de álgebra. Galois escribió pocos trabajos, sus manuscritos y borradores apenas ocupan 120 páginas en un libro de pequeño formato, pero el significado de estos trabajos es enorme. Sus trabajos se hallan coleccionados en obras matemáticas de Galois.

Reflexiona

- *El enfoque proactivo consiste en cambiar de adentro hacia afuera y ser distinto, y de esta manera provocar un cambio positivo en lo que está allí afuera.*
- *Somos responsables, tenemos "habilidad de respuesta", de controlar nuestras vidas y de influir poderosamente en nuestras circunstancias trabajando sobre el ser, sobre lo que somos.*
- *Lo más proactivo a nuestro alcance es ser feliz, sonreír auténticamente. La felicidad, como la desdicha, es una elección proactiva.*

¡Razona...!

Señala el par que continúa en la serie: 2–4; 3–9; 5–20;...

A) 8 - 48 B) 7 - 35 C) 8 - 24
D) 7 - 42 E) 6 - 30

Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: POLÍGONOS REGULARES

1 En una circunferencia cuyo radio mide $\sqrt{2}$, se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que: AC = $\sqrt{6}$, BD = 2 y la $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC}$. Calcula la medida del ángulo formado por $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 60° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 30°

2 En una circunferencia se encuentra inscrito un polígono regular de 16 lados. Si el radio mide 4, halla el valor del lado de dicho polígono.

A) $4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ B) $4\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$
C) $6\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ D) $2\sqrt{2}+\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

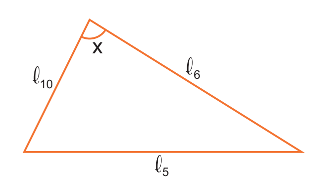
3 La longitud del lado de un dodecágono regular ABCDE… es $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$. Halla AE.

A) $\sqrt{3}$ B) 6 C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) 3

4 Si la diagonal de un pentágono regular mide ($\sqrt{5}$ + 1), halla su perímetro.

A) 5 B) 10 C) 8
D) 7 E) 11

5 En la figura se muestran las longitudes de los lados de un pentágono regular, hexágono regular y un decágono regular, estos inscritos en una misma circunferencia. Halla x.



A) 100° B) 108° C) 120°
D) 90° E) 60°

6 Halla el perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3.

A) 16 B) 18 C) 20
D) 12 E) 15

7 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B; AC = 2 m. Si la bisectriz relativa a la hipotenusa mide igual que el cateto menor. Calcula la medida de dicho cateto.

A) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m B) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m
C) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ m D) $3\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m E) $\sqrt{2}$ m

8 En una circunferencia de centro Q y radio $\sqrt{2}$ m, se trazan los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, perpendiculares entre sí. La recta que une el punto A con el punto medio O de $\overline{BC}$, lado del hexágono regular inscrito corta a $\overline{DE}$ en N. Calcula QN.

A) $\sqrt{6}/5$ m B) $\sqrt{6}/7$ m C) $\sqrt{7}/6$ m
D) $\sqrt{3}/2$ m E) $\sqrt{6}/4$ m

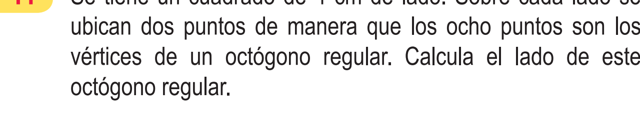
9 En un triángulo ABC obtuso en A se sabe que AB = 2, BC = $\sqrt{5}+1$ y la m∠C = 18°. Calcula la m∠B.

A) 36° B) 53° C) 49°
D) 42° E) 12°

10 En una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, se inscribe un octógono regular. Calcula el perímetro del polígono formado al unir los puntos medios de los lados consecutivos de dicho polígono.

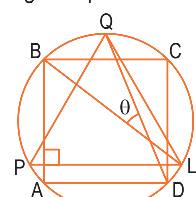
A) $4\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) 8
D) 4 E) $6\sqrt{2}$

11 Se tiene un cuadrado de 4 cm de lado. Sobre cada lado se ubican dos puntos de manera que los ocho puntos son los vértices de un octógono regular. Calcula el lado de este octógono regular.



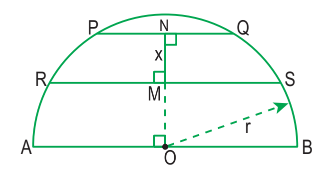
A) $2(\sqrt{2}+2)$ cm B) $4(\sqrt{2}+2)$ cm
C) $4(\sqrt{2}-1)$ cm D) $4(2-\sqrt{2})$ cm
E) $2(\sqrt{2}+1)$ cm

12 Si ABCD es un cuadrado, calcula θ si además PQL es un triángulo equilátero.



A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 50°

13 Si $\overline{PQ} // \overline{RS}$, además, la m$\overset{\frown}{PR}$ = m$\overset{\frown}{SB}$ = 30°. Calcula x si r = $\sqrt{3}+1$.



A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}-2$ C) 1
D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{3}$

14 En un hexágono regular de 2 m de lado, se prolonga cada uno de sus lados la misma longitud de su lado y en un mismo sentido. Halla la apotema del polígono que resulte al unir los extremos de estas prolongaciones.

A) 3 m B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m C) $2\sqrt{3}$ m
D) 4 m E) $\sqrt{3}$ m

Claves

1. B	3. E	5. D	7. B	9. E	11. C	13. C
2. A	4. B	6. B	8. B	10. C	12. B	14. A

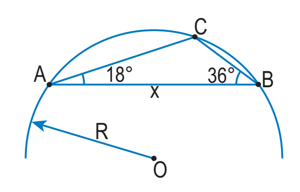
Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Marca la opción correcta, teniendo en cuenta el siguiente gráfico:



I. $x = 2R(\sqrt{5} + 1)$ ☐

II. $x = R(\sqrt{5} + 1)$ ☐

III. $x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$ ☐

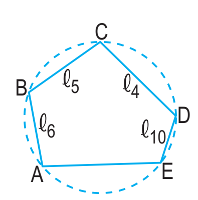
2. Coloca V (verdadero) o F (falso) según corresponda:
Si el número de lados de un polígono regular se incrementó considerablemente, entonces:

I. La longitud de su apotema es casi equivalente a la longitud de su circunradio. ☐

II. La longitud de sus lados también aumenta. ☐

III. Su área es casi igual al área de la circunferencia circunscrita a dicho polígono regular. ☐

3. En el siguiente gráfico marca la opción correcta teniendo en cuenta el siguiente gráfico.



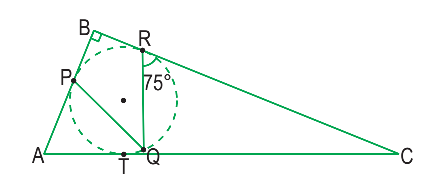
I. $\ell_4^2 + \ell_6^2 = \ell_{10}^2$ ☐

II. $\ell_8^2 + \ell_4^2 = \ell_5^2$ ☐

III. $\ell_6^2 + \ell_4^2 = \ell_5^2$ ☐

Razonamiento y demostración

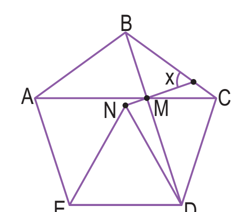
4. Halla la medida de $\overline{PQ}$, si $m\angle QRC = 75°$, BC = 12 y AC = 13. Además P, R y T son puntos de tangencia.



A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $\sqrt{5} + 1$

D) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ E) $2\sqrt{5} + 2$

5. Si $EN = ND = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, en donde R es el circunradio del pentágono regular ABCDE; calcula x.



A) 36°
B) 54°
C) 72°
D) 30°
E) 60°

Resolución de problemas

6. El lado de un dodecágono regular ABCD...JKL mide $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$. Calcula AE.

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

7. El lado de un hexágono regular mide 6. Halla el perímetro del nuevo hexágono regular formado al unir en forma consecutiva los puntos medios de los lados del primero.

A) $6\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$
D) $18\sqrt{3}$ E) $36\sqrt{3}$

8. Calcula el circunradio de un triángulo ABC sabiendo que AB = 4; $BC = 3\sqrt{3}$ y la $m\angle B = 30°$.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{7}$ E) $3\sqrt{2}$

9. El lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia mide 4. Calcula el lado de un octógono regular inscrito en la misma circunferencia.

A) $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ C) $2\sqrt{4 - \sqrt{2}}$
D) $2\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

10. Calcula la longitud de una de las diagonales de un pentágono regular cuyo lado mide 2.

A) $\sqrt{5} + 1$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $3\sqrt{5} - 2$
D) $2\sqrt{5}$ E) $10\sqrt{5}$

NIVEL 2

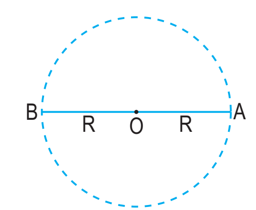
Comunicación matemática

11. En cuáles de los siguientes polígonos regulares se cumple que: $\ell_n > ap_n$

I. Triángulo equilátero
II. Hexágono regular
III. Pentágono regular
IV. Octogono regular

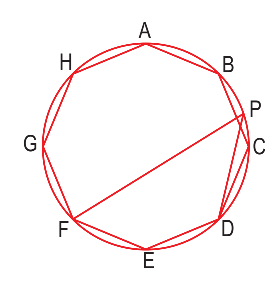
A) I y II B) Todos C) I, II y III
D) Ninguno E) II y III

12. En la siguiente circunferencia dibuja un decagono regular con la ayuda de un compás.



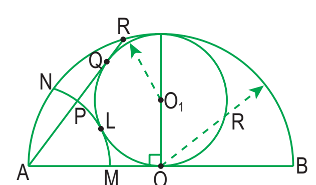
Razonamiento y demostración

13. Si ABCDEFGH es polígono regular. Calcula HP, si FP = $b\sqrt{2}$ y DP = a.



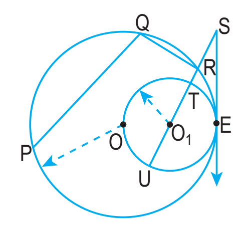
A) $b + \frac{a}{2}$ B) 2b – a C) 2b + a
D) b – a E) b + a

14. Halla la $m\overset{\frown}{NR}$, si Q y L son puntos de tangencia.



A) 28° B) 36° C) 48°
D) 38° E) 30°

15. Calcula la m∠PQR, si OE = SE, PQ = US y QR = TS. E es punto de tangencia.



A) 96° B) 108° C) 135°
D) 127° E) 143°

Resolución de problemas

16. Se tiene un triángulo rectángulo ABC cuya hipotenusa mide 16 cm. Si uno de sus ángulos mide 7°30'. Halla la altura relativa a la hipotenusa.

A) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm B) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm C) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm
D) $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm E) $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm

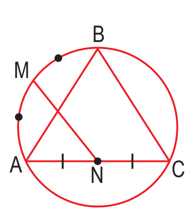
17. El perímetro de un hexágono regular es $24\sqrt{3}$ m. Halla el perímetro del nuevo hexágono que se forma al unir los puntos medios de los lados del hexágono original.

A) 24 m B) 36 m C) $12\sqrt{3}$ m
D) $8\sqrt{3}$ m E) 18 m

18. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, por A y C se trazan AP y CQ perpendiculares a las bisectrices de los ángulos C y A. Halla PQ, si AC = $6\sqrt{2}$.

A) 6 B) $3\sqrt{2}$ C) 12
D) $4\sqrt{2}$ E) 10

19. En la figura el radio de la circunferencia mide $2\sqrt{7}$, el triángulo ABC es equilátero; M y N son puntos medios de $\overset{\frown}{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Calcula MN.



A) 6 B) 7 C) $6\sqrt{2}$
D) 5 E) $5\sqrt{2}$

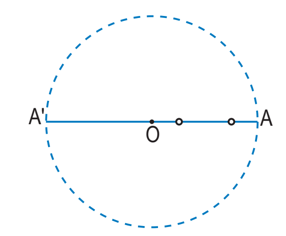
NIVEL 3

Comunicación matemática

20. Completa los valores correspondientes en el recuadro, teniendo en cuenta que los polígonos regulares se encuentran inscritos en la misma circunferencia de radio igual a 4, además: sen(51.43°) = 0,782 y cos(51.43°) = 0,623

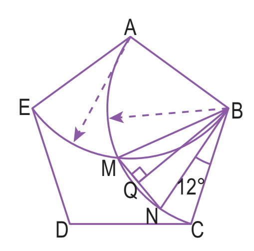
n	α_n	ℓ_n	ap_n	A_n	ℓ_{2n}
4					
5					
6					
7					
8					

21. En la siguiente circunferencia dibuja un heptágono regular con la ayuda de un compás (el heptágono regular debe estar circunscrito a dicha circunferencia).



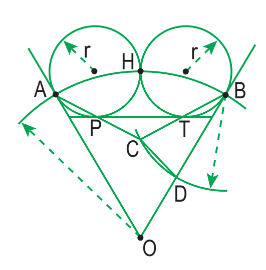
Razonamiento y demostración

22. Calcula la medida de BQ si ABCDE es un pentágono regular de circunradio 6.



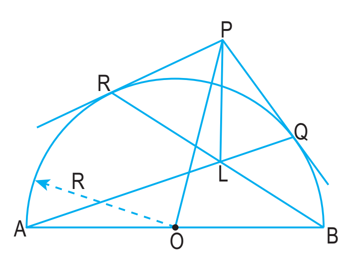
A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $(5-\sqrt{5})$
D) $(5+\sqrt{5})$ E) $3\sqrt{5}$

23. Halla CD si m$\angle$AOB = 60° y $r = 2\sqrt{3}$.
(A, P, T, B y H son puntos de tangencia)



A) $(2\sqrt{2-\sqrt{3}})$ B) $(2+\sqrt{3})$ C) $(\sqrt{5}+1)$
D) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})$ E) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

24. Del gráfico; 3(AB) = 8(PQ) y OP = 5 u. Calcula el valor de AQ si m$\angle$OPL = 17°. (Q y R puntos de tangencia).



A) $(2-\sqrt{2})$ u
B) $(\sqrt{5}-1)$ u
C) $(2\sqrt{10+2\sqrt{5}})$ u
D) $(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$ u
E) $\sqrt{5}$ u

Resolución de problemas

25. En un hexágono regular ABCDEF se construye interiormente un cuadrado BCMN. Calcula AN si el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono mide $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ m.

A) 2 m B) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m C) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ m
D) $\sqrt{6}$ m E) 1 m

26. En un cuadrado ABCD de lado 4, tomando como centro los vértices A y D y con radio a se trazan los arcos BD y AC, secantes en F. Halla la distancia entre los puntos medios de $\overset{\frown}{AF}$ y $\overset{\frown}{FD}$.

A) $2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ B) $4\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ C) $3\sqrt{4-2\sqrt{3}}$
D) $3\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ E) $4\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

27. En un triángulo ABC, la m$\angle$ABC = 108° y su incentro es I, calcula la longitud del circunradio del triángulo AIC, si el circunradio del triángulo ABC es R.

A) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)R$ B) $\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)R$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}R$
D) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)R$ E) $(\sqrt{5}+1)R$

28. En un pentágono regular ABCDE, la diagonal BD interseca a las diagonales AC y EC en los puntos P y Q. Si $AB = (3+\sqrt{5})$, entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es:

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{10}$
D) 2 E) $2\sqrt{5}$

29. En un polígono regular, el número total de diagonales es la tercera parte de la diferencia entre el perímetro y el número de ángulos rectos que equivale a la suma de las medidas de sus ángulos internos. Calcula el perímetro del polígono, si la longitud de su lado es una cantidad entera.

A) 56 B) 63 C) 69
D) 72 E) 86

Claves

NIVEL 1	7. D	13. B	NIVEL 3	26. B
1.	8. D	14. D	20.	27. D
2.	9. B	15. B	21.	28. D
3.	10. A	16. C	22. E	29. D
4. A	NIVEL 2	17. B	23. E	
5. E	11. C	18. A	24. C	
6. C	12.	19. B	25. E	

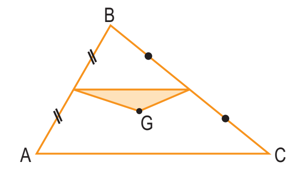
Aplicamos lo aprendido





TEMA 2: ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

1 En la figura, halla el área de la región sombreada, siendo G el baricentro del $\triangle ABC$ y además: $S_{\triangle ABC} = 36\ m^2$.



A) $4\ m^2$ B) $2\ m^2$ C) $3\ m^2$
D) $6\ m^2$ E) $9\ m^2$

2 En la figura, AC = 2 m, CF = 1 m. Si los triángulos ABC y CEF son equiláteros, halla el área del cuadrilátero ABEF.

A) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\ m^2$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{3}\ m^2$ C) $\frac{4}{3}\sqrt{3}\ m^2$
D) $\frac{7\sqrt{3}}{4}\ m^2$ E) $\frac{3}{2}\sqrt{2}\ m^2$

3 Uno de los lados de un triángulo tiene longitud L. Halla la longitud del segmento paralelo a dicho lado e intersecado por los otros dos, que determina figuras equivalentes.

A) $L\sqrt{2}$ B) $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{L\sqrt{3}}{2}$
D) $L\sqrt{3}$ E) $\frac{L\sqrt{3}}{4}$

4 La hipotenusa AC de un triángulo rectángulo isósceles ABC, tiene longitud L. Exteriormente se construye el cuadrado ACDE. $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ cortan a $\overline{AC}$ en los puntos P y Q. Halla el área de la región triángular PBQ.

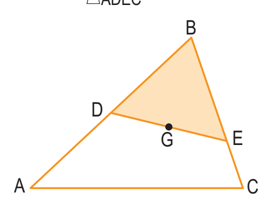
A) $\frac{L^2}{4}$ B) $\frac{L^2}{6}$ C) $\frac{L^2}{12}$
D) $\frac{L^2}{8}$ E) $\frac{L^2}{16}$

5 Halla el área de la región triangular correspondiente a un triángulo isósceles, en el cual la base mide 16 cm y el circunradio 10 cm, siendo el triángulo obtusángulo.

A) $20\ cm^2$ B) $12\ cm^2$ C) $30\ cm^2$
D) $32\ cm^2$ E) $28\ cm^2$

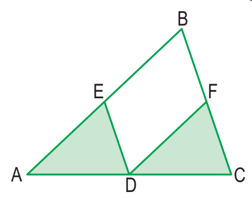
6 En la figura: G es baricentro del $\triangle ABC$; BE = 3EC y DB = 3AD.

Calcula: $\frac{A_{\triangle DBE}}{A_{\square ADEC}}$



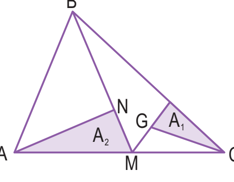
A) $\frac{9}{11}$ B) $\frac{9}{13}$ C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

7 En la figura: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$. Si el área de la región triangular AED es 25 m^2, el área de la región triangular DFC es 9 m^2. Calcula el área de la región triangular ABC.



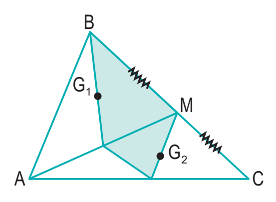
A) 60 m^2 B) 72 m^2 C) 81 m^2
D) 64 m^2 E) 68 m^2

8 Del gráfico G y N son baricentros de los triángulos BMC y ABC, respectivamente. Si: $A_1 = 10$ m^2, calcula A_2.



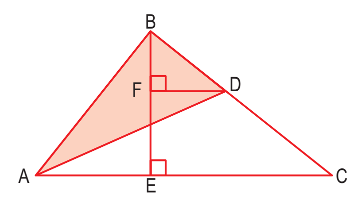
A) 10 m^2 B) 15 m^2 C) 20 m^2
D) 25 m^2 E) 30 m^2

9 Si G_1 y G_2 son los baricentros de los triángulos ABM y AMC, calcula el área de la región sombreada, si $A_{\Delta ABC} = 80$ m^2.



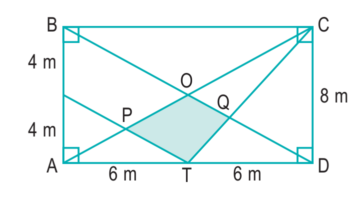
A) 20 m^2 B) 30 m^2 C) 40 m^2
D) 36 m^2 E) 50 m^2

10 De la figura, calcula el área de la región sombreada, si: BF = 3 cm y AC = 10 cm.



A) 10 cm^2 B) 15 cm^2 C) 18 cm^2
D) 20 cm^2 E) 25 cm^2

11 Halla el área de la región sombreada.

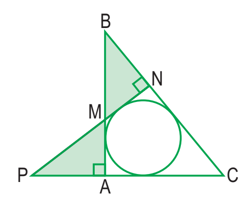


A) 10 m^2 B) 12 m^2 C) 15 m^2
D) 16 m^2 E) 24 m^2

12 Los lados de un triángulo ABC son números enteros en progresión aritmética. Calcula el área de la región triangular ABC, si el valor de dicha área es númericamente igual a su perímetro.

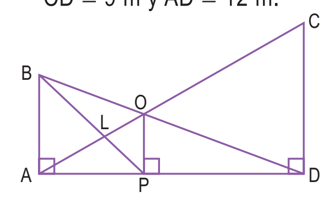
A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 28

13 En la figura mostrada. Si: AC = 5 m y AB = 12 m. Calcula el área de la región sombreada.



A) 20 m^2 B) 22 m^2 C) $26,\hat{6}$ m^2
D) 24 m^2 E) 28 m^2

14 Halla el área de la región triangular OPL, si AB = 6 m, CD = 9 m y AD = 12 m.



A) $\frac{26}{19}$ cm^2 B) $\frac{81}{25}$ cm^2 C) 62 m^2
D) 4 cm^2 E) 3 cm^2

Claves

1. C	3. B	5. D	7. D	9. B	11. A	13. C
2. D	4. C	6. C	8. C	10. B	12. D	14. B

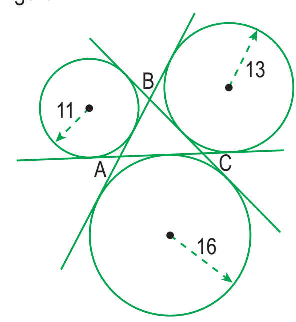
Practiquemos



NIVEL 1

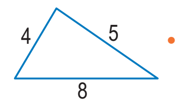
Comunicación matemática

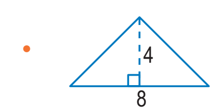
1. De la siguiente figura:

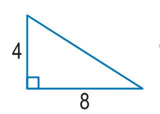


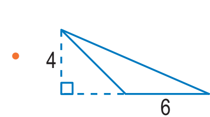
Completa:
Si $A_{\Delta ABC} = 4\sqrt{715}$, entonces es inradio del ΔABC es igual a ☐

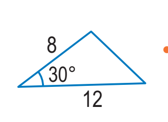
2. Relaciona las regiones triangulares cuyas áreas tengan igual valor.

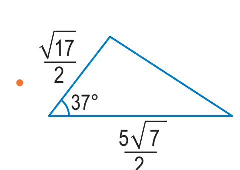






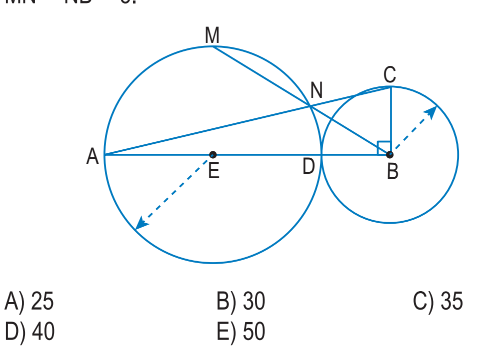






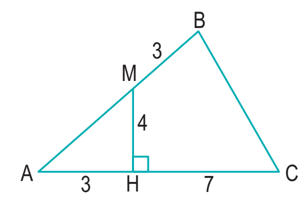
Razonamiento y demostración

3. Halla el área de la región triangular ABC, recto en B, si MN = NB = 5.



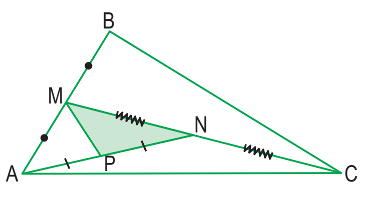
A) 25 B) 30 C) 35
D) 40 E) 50

4. Calcula el área de la región triangular ABC.



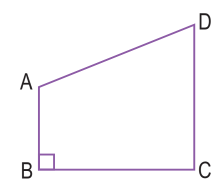
A) 20 B) 25 C) 32 D) 38 E) 42

5. En la figura $S_{\Delta ABC} = 48$, calcula $S_{\Delta MNP}$.



A) 6 B) 8 C) 12 D) 9 E) 16

6. Si AB = 6; BC = 8, AD = DC y $m\angle D = 60°$. Halla el área del triángulo ADC.



A) $20\sqrt{3}$ B) $25\sqrt{3}$ C) $15\sqrt{3}$ D) $50\sqrt{3}$ E) 100

Resolución de problemas

7. Si G es el baricentro del triángulo ABC recto en B, la distancia del baricentro de dicho triángulo a los puntos medios M y N de los lados BC y AC miden 5 m y 3 m respectivamente. Calcula el área de la región triangular AGN.

A) $4\sqrt{11}\ m^2$ B) $3\sqrt{10}\ m^2$ C) $3\sqrt{11}\ m^2$
D) $4\sqrt{10}\ m^2$ E) $5\sqrt{11}\ m^2$

8. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, se construye exteriormente el cuadrado ACDE. H es la proyección del punto D sobre $\overline{AB}$. Si AB = 4 y BC = 6, calcula el área de la región DEH.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

9. En un cuadrado ABCD se ubica un punto M interior tal que $m\angle AMD = 90°$ y el producto de las áreas de las regiones triangulares AMB y CMD es 48 cm^4. Calcula el área de la región triangular AMD.

A) $2\sqrt{5}\ cm^2$ B) $2\sqrt{6}\ cm^2$ C) $6\sqrt{3}\ cm^2$
D) $3\sqrt{3}\ cm^2$ E) $4\sqrt{3}\ cm^2$

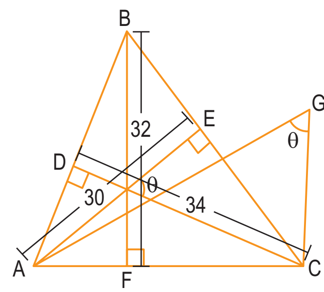
10. El área de una región triangular ABC es 64. Sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se toman los puntos M y N respectivamente, tales que AB = 4BM y BN = NC. Calcula el área de la región triangular MBN.

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

NIVEL 2

Comunicación matemática

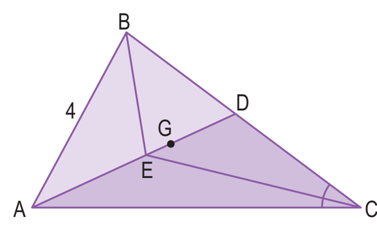
11. De la figura:



Si AB × BC = 1088, entonces:

AC = ☐ y $A_{\Delta ABC}$ = ☐

12. En el ΔABC, m∠ABE = m∠DBE y la distancia del punto D a $\overline{AC}$ mide 3, además, G es baricentro del ΔABC.

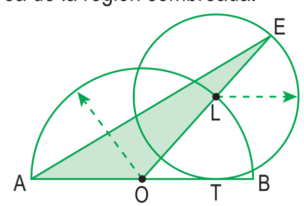


Completa los recuadros con los símbolos >; < o =, según corresponda.

$A_{\Delta ABE}$		$A_{\Delta AEC}$
$A_{\Delta EDC}$	☐	$A_{\Delta BED}$
$A_{\Delta BED}$	☐	$A_{\Delta ABE}$
$A_{\Delta AEC}$	☐	$A_{\Delta BED}$

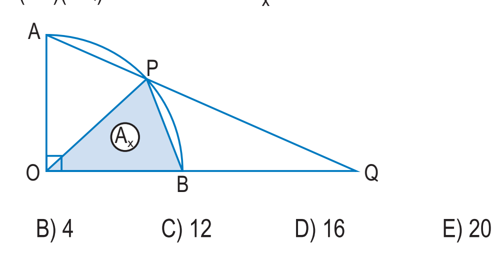
Razonamiento y demostración

13. Según el gráfico T es punto de tangencia y OT = LE + TB = 8 cm. Calcula el área de la región sombreada.



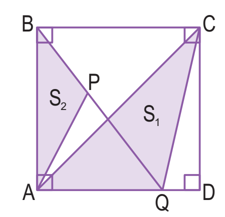
A) 36 cm^2 B) 54 cm^2 C) 24 cm^2
D) 48 cm^2 E) 64 cm^2

14. En la figura (AP)(PQ) = 16. Calcula: A_x



A) 8 B) 4 C) 12 D) 16 E) 20

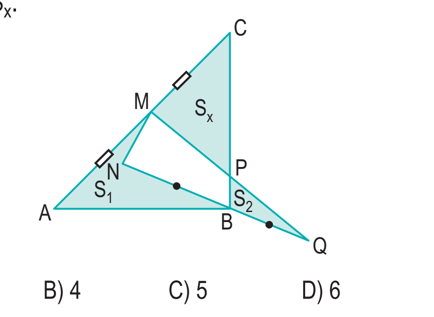
15. Si ABCD es un cuadrado y APQ es un triángulo equilátero, calcula: $\frac{S_2}{S_1}$



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

16. En la figura: $S_1 = 5$; $S_2 = 2$.

Calcula S_x.



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución de problemas

17. El área de una región triangular ABC es 72 m^2, por el baricentro G se trazan paralelas a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que intersecan a $\overline{AC}$ en los puntos E y F respectivamente. Calcula el área de la región triangular EGF.

A) 6 m^2 B 7 m^2 C) 8 m^2
D) 9 m^2 E) $10\sqrt{3}$ m^2

18. Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos, cuyos radios miden r_1; r_2 y r_3.

Si: $r_1 + r_2 + r_3 = (r_1)(r_2)(r_3) = 6$

Calcula el área de la región triangular cuyos vértices son los centros de las circunferencias.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. En un triángulo ABC la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Calcula el área de la región triangular MCN si: AB = 8 cm; BC = 15 cm y AC = 17 cm.

A) $\frac{571}{17}$ cm^2 B) $\frac{575}{17}$ cm^2 C) $\frac{576}{17}$ cm^2
D) $\frac{591}{17}$ cm^2 E) $\frac{599}{17}$ cm^2

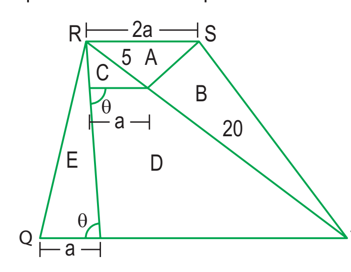
20. En un triángulo ABC (3AB = 2BC), se traza la bisectriz interior BD y se ubican los baricentros G_1 y G_2 de los triángulos ABD y BDC respectivamente. Calcula la razón de las áreas de las regiones triangulares ABG_1 y BG_2C

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

NIVEL 3

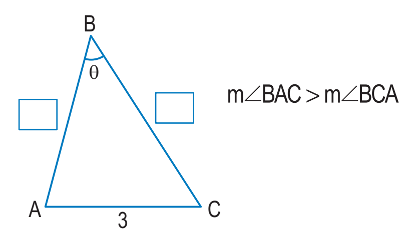
Comunicación matemática

21. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda, si se sabe que QRST es un trapecio.



- $A = \frac{B}{4}$ ( )
- D = 12C ( )
- $E = \frac{B}{4}$ ( )
- E = C ( )
- D = 12A ( )

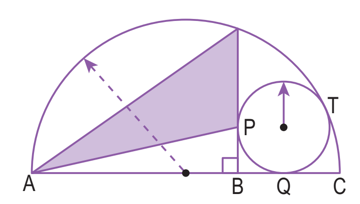
22. Completa los recuadros en la siguiente figura, si se sabe que: $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{1235}}{126}$, el área de dicha región es $\sqrt{\frac{1235}{4}}$ y AB y BC son números enteros.



m∠BAC > m∠BCA

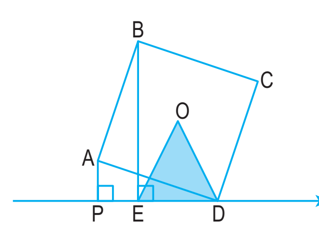
Razonamiento y demostración

23. Calcula el área de la región triangular sombreada, si AB = 32 m y BC = 18 m (P, Q y T son puntos de tangencia).



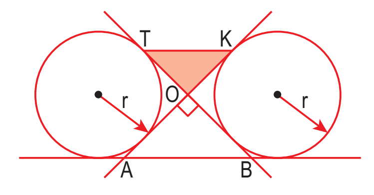
A) 256 m^2
B) 224 m^2
C) 236 m^2
D) 244 m^2
E) 212 m^2

24. Según la figura mostrada calcula el área de la región sombreada. Si ED = 10 m y AP = 6 m. (O: centro del cuadrado ABCD).



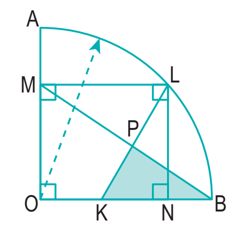
A) 45 m^2
B) 55 m^2
C) 66 m^2
D) 75 m^2
E) 65 m^2

25. Halla el área de la región triangular TOK, si el área de la región triangular AOB es 6 m^2.



A) 4,5 m^2
B) 5,5 m^2
C) 6 m^2
D) 3 m^2
E) 1,5 m^2

26. De la figura, mostrada, OK = NK = 2 y OM = 3. Calcula el área de la región sombreada.



A) 9/7
B) 27/14
C) 27/8
D) 9/14
E) 18/7

Resolución de problemas

27. En un triángulo ABC la circunferencia exinscrita es tangente a $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Calcula el área de la región triangular BNM, si: AB = 7 m; BC = 8 m y AC = 9 m.

A) $7\sqrt{5}/6$ m^2 B) $5\sqrt{5}$ m^2 C) $8\sqrt{5}/3$ m^2
D) $9\sqrt{5}/5$ m^2 E) $5\sqrt{5}/2$ m^2

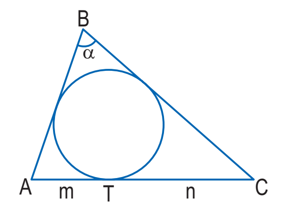
28. La circunferencia inscrita a un △ABC es tangente a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N. Las prolongaciones de $\overline{MN}$ y $\overline{CA}$ se intersecan en P. Calcula el área de la región triangular MPA y PBC, si AB = 5, BC = 7 y AP = AC = 6.

A) $3\sqrt{6}/5$; $3\sqrt{6}$ B) $7\sqrt{6}/5$; $7\sqrt{6}$ C) $9\sqrt{6}/5$; $9\sqrt{6}$
D) $11\sqrt{6}/5$; $11\sqrt{6}$ E) $12\sqrt{6}/5$; $12\sqrt{6}$

29. El exradio relativo al lado $\overline{BC}$ de un △ABC mide 4. Calcula el área del △ABC, si los segmentos determinados por la circunferencia exinscrita sobre el lado $\overline{BC}$ miden 1 y 2.

A) 12/5 B) 12/7 C) 15/4 D) 18/5 E) 21/8

30. Del gráfico, calcula α, si el área de la región triangular ABC es 27 m^2 y además la media geométrica de m y n es 6.



A) 37°
B) 53°
C) 106°
D) 74°
E) 108°

Claves

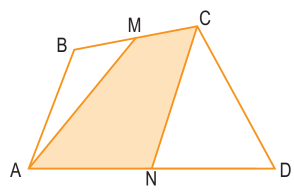
NIVEL 1	7. A	13. D	20. D	26. B
1.	8. C	14. B	NIVEL 3	27. E
2.	9. E	15. B	21.	28. E
3. A	10. B	16. E	22.	29. B
4. C	NIVEL 2	17. C	23. A	30. C
5. A	11.	18. D	24. B	
6. B	12.	19. C	25. D	

Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

1 En la figura el área de la región cuadrangular ABCD es 48 m^2, calcula el área de la región sombreada (M y N son puntos medios).



A) 12 m^2 B) 16 m^2 C) 24 m^2
D) 30 m^2 E) 32 m^2

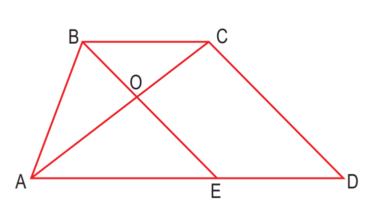
2 Calcula el área de una región trapecial, cuyas bases miden 4 y 9 m, si su altura es media proporcional entre sus bases.

A) 18 m^2 B) 26 m^2 C) 34 m^2
D) 39 m^2 E) 42 m^2

3 Dado un triángulo ABC, donde el área de su región es 18 m^2. Se traza la altura BH, si la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en N. Calcula el área de la región cuadrangular ABNH.

A) 6 m^2 B) 8 m^2 C) 9 m^2
D) 10 m^2 E) 12 m^2

4 Calcula el área de la región ABCD si BCDE es un paralelogramo, $A_{\triangle ABO} = 4\ m^2$ y $A_{\square COED} = 10\ m^2$.



A) 24 m^2 B) 20 m^2 C) 25 m^2
D) 27 m^2 E) 32 m^2

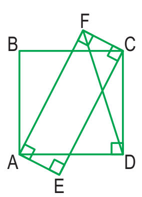
5 Las diagonales de un trapezoide miden 6 m y 8 m. Calcula el área máxima.

A) 12 m^2 B) 18 m^2 C) 20 m^2
D) 24 m^2 E) 48 m^2

6 Calcula el área de una región trapecial isósceles circunscrita a una circunferencia cuyas bases miden 8 y 18 m.

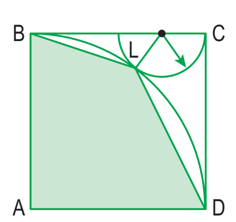
A) 144 m^2 B) 146 m^2 C) 150 m^2
D) 156 m^2 E) 172 m^2

7 Calcula: $A_{\square ABCD} + A_{\square AFCE}$, si ABCD es un cuadrado y FD=K.



A) K^2 B) $\frac{K^2}{2}$ C) $\frac{K^2}{4}$
D) $2K^2$ E) $\sqrt{2}\,K^2$

8 Si el área de la región cuadrada es 16 cm^2, calcula el área de la región ABLD, siendo L punto de tangencia.



A) 12 cm^2 B) 11 cm^2 C) 11,2 cm^2
D) 11,5 cm^2 E) 11,8 cm^2

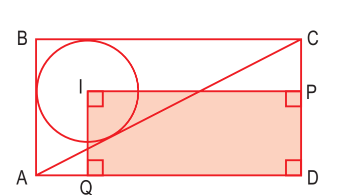
9 Una de las bases de un trapecio mide 10 m, su altura 4 m y el área 32 m^2. Calcula la longitud de la paralela a las bases, trazada a un metro de distancia de la base dada.

A) 9 m B) 10 m C) 11 m
D) 12 m E) 14 m

10 Halla el área de una región rombal ABCD, en el cual M es punto medio de BC. AM corta a BD en el punto R, RM = $\sqrt{2}$ y el ángulo BRM mide 45°.

A) 24 m^2 B) 22 m^2 C) 26 m^2
D) 12 m^2 E) 10 m^2

11 Dado el rectángulo ABCD, I es incentro del triángulo ABC. El área de la región rectangular ABCD es k. Halla el área de la región rectangular QIPD.



A) k/2 B) k/3 C) $k/\sqrt{2}$
D) k/4 E) $k/\sqrt{3}$

12 Sea ABCD un cuadrado cuyo lado mide 6 m. Si se trazan los segmentos paralelos $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$, distantes 2 m entre sí, de modo que F ∈ $\overline{DC}$ y E ∈ $\overline{AB}$, entonces el área de la región paralelográmica que se forma, es:

A) $\left(\frac{\sqrt{133}-9}{2}\right)$ m^2 B) $3\left(\frac{\sqrt{153}-3}{2}\right)$ m^2
C) $\left(\frac{\sqrt{153}-3}{2}\right)$ m^2 D) $3\left(\frac{\sqrt{133}-2}{2}\right)$ m^2
E) $\left(\frac{\sqrt{153}-2}{2}\right)$ m^2

13 En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, m∠A = 80°, m∠D = 50°. Si AB = m; BC = n (m < n) y la altura del trapecio es h, calcula el área de la región trapecial.

A) $\frac{mh}{2}$ B) $\left(\frac{m+n}{2}\right)h$ C) $\left(\frac{m+2n}{2}\right)h$
D) $\left(\frac{m-n}{2}\right)h$ E) $\left(\frac{2m-n}{2}\right)h$

14 En un cuadrado de 6 m de lado se inscribe un rectángulo de 8 m de diagonal, con la condición de que sus lados sean paralelos a las diagonales del cuadrado. El área de la región rectangular, es:

A) 2 m^2 B) $2\sqrt{5}$ m^2 C) $4\sqrt{5}$ m^2
D) 4 m^2 E) 5 m^2

Claves

1. C	3. C	5. D	7. A	9. A	11. A	13. C
2. D	4. A	6. D	8. C	10. A	12. B	14. D

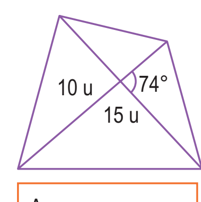
Practiquemos



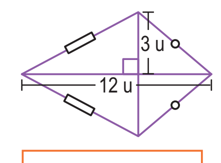
NIVEL 1

Comunicación matemática

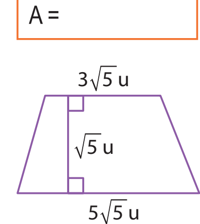
1. Indica el área de las respectivas regiones cuadrangulares.



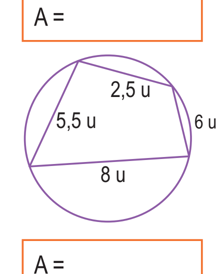
A =



A =

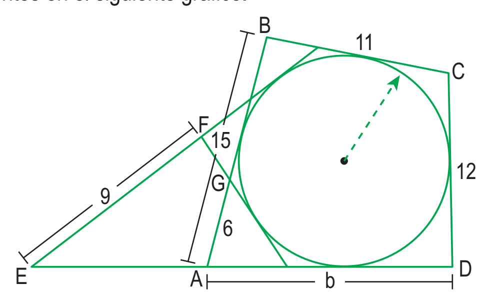


A =



A =

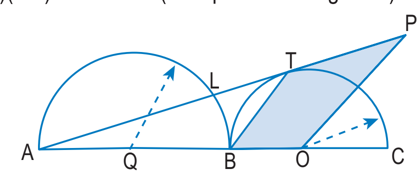
2. Completa el recuadro en blanco teniendo en cuenta los valores presentes en el siguiente gráfico.



Si $A_{\square ABCD} = 9\,(A_{\square EFGA})$, entonces $b =$

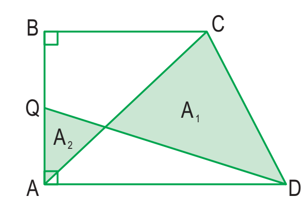
Razonamiento y demostración

3. En el gráfico, calcula el área de la región sombreada, si: AL = PL y (AL)(OC) = 16 cm^2. (T es punto de tangencia).



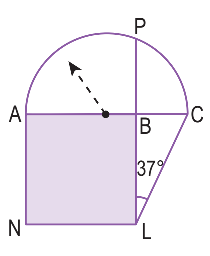
A) 2 cm^2 B) 4 cm^2 C) 6 cm^2 D) 8 cm^2 E) 10 cm^2

4. En la figura, el cuadrilátero ABCD es un trapecio rectángulo. Si: (AD)(BQ) = 8 cm^2, calcula: $A_1 - A_2$, siendo A_1 y A_2 las áreas de las regiones sombreadas.



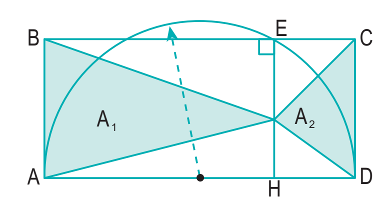
A) 2 cm^2 B) 4 cm^2 C) 6 cm^2 D) 8 cm^2 E) 10 cm^2

5. En el gráfico, calcula el área de la región cuadrada ABLN, si PB = $2\sqrt{3}$ cm.



A) 14 cm^2 B) 15 cm^2 C) 16 cm^2
D) 18 cm^2 E) 20 cm^2

6. En el gráfico, ABCD es un rectángulo. Si: BE = 8 cm y EC = 2 cm, calcula $A_1 + A_2$.



A) 20 cm^2 B) 12 cm^2 C) 13 cm^2
D) 18 cm^2 E) 10 cm^2

Resolución de problemas

7. En un romboide ABCD siendo O punto de intersección de las diagonales, si las distancias de O a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son 2 y 3, respectivamente y la m∠ABC = 135°. Calcula el área de la región ABCD.

A) $12\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{2}$
D) $20\sqrt{2}$ E) $24\sqrt{2}$

8. En una semicircunferencia de diámetro AB y centro O, se ubican los puntos P, Q y R. Calcula el área de la región limitada por el rombo PQRS tal que QS = 2(SO) = 2a, (S ∈ $\overline{QO}$).

A) $a^2\sqrt{5}$ B) $a^2\sqrt{6}$ C) $2a^2\sqrt{5}$
D) $2a^2\sqrt{10}$ E) $a^2\sqrt{10}$

9. En un triángulo ABC, isósceles, con AB = BC, la altura que parte de B mide 8 y el perímetro 32. Calcula el área de la región rombal ABCD, donde D es simétrico a B, respecto de $\overline{AC}$.

A) 252 B) 128 C) 96
D) 284 E) 112

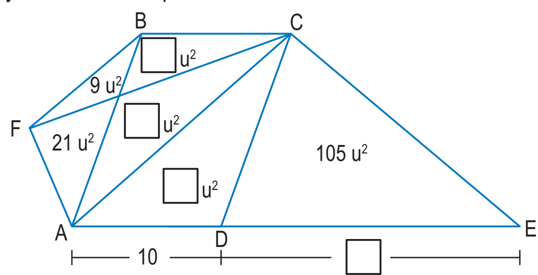
10. Se tiene un rectángulo ABCD, desde D se traza $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, luego se traza $\overline{BF}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{DE}$. Si BF = 6 y DE = 4, calcula el área de la región cuadrangular ABCD.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 80

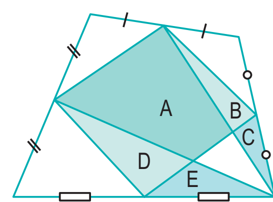
NIVEL 2

Comunicación matemática

11. En la figura, completa los recuadros, si ABCD es un paralelogramo y AFBC es un trapecio.



12. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



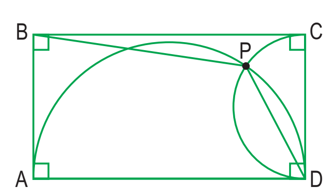
I. $A_{\square ABCD} = 2(D + E + B + C)$ ☐

II. $A_{\square ABCD} = 4(B + D)$ ☐

III. $C + E = \dfrac{A - B - D}{2}$ ☐

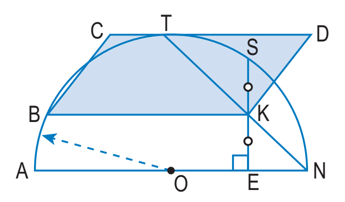
Razonamiento y demostración

13. Calcula el área de la región rectangular ABCD, si BP = 2 y PD = 1.



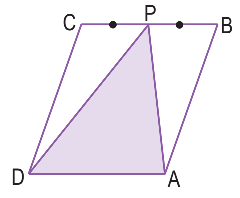
A) $\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{5}$
C) $\sqrt{7}$
D) $4\sqrt{7}$
E) $2\sqrt{7}$

14. Calcula el área de la región paralelográmica BCDK, si SK = KE = 2 y $\overline{CD}//\overline{NA}$ (T: punto de tangencia).



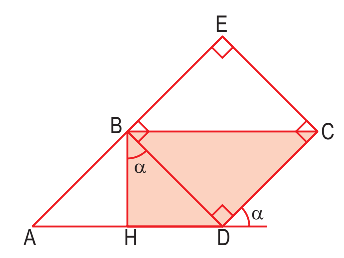
A) $2(3 + \sqrt{21})$
B) $3(3 + \sqrt{21})$
C) $3\sqrt{21}$
D) $4(4 + \sqrt{21})$
E) $2(2 + \sqrt{21})$

15. Calcula el área de la región sombreada, si AP = 9 y DP = 13, donde ABCD es un rombo.



A) $\sqrt{14}$
B) $24\sqrt{14}$
C) $3\sqrt{14}$
D) $12\sqrt{14}$
E) 8

16. De la figura, (BD)(BE) = 20 m^2 y 2(AH) = 3(HD). Calcula el área de la región trapezoidal BCDH, si AB = DC.



A) 10 m^2
B) 12 m^2
C) 14 m^2
D) 16 m^2
E) 18 m^2

Resolución de problemas

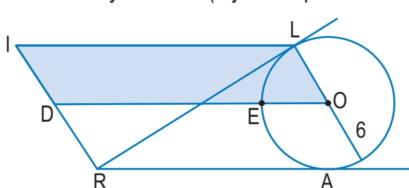
17. En un rombo ABCD en $\overline{BC}$ se ubica el punto medio M. Las diagonales del rombo intersecan a $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ en N y Q; respectivamente. Si: NQ = 5 y la m∠BAD = 74°. Calcula el área de la región limitada por el rombo.

A) 284 B) 216 C) 324 D) 356 E) 420

18. Sobre los lados de un cuadrado se construyen exteriormente triángulos equiláteros. Calcula el área del cuadrilátero que se forma al unir los vértices libres de los triángulos equiláteros, si el lado del cuadrado mide b.

A) $b^2(\sqrt{3} + 1)$ B) $b^2(2\sqrt{3} - 1)$ C) $3b^2$
D) $b^2(2 + \sqrt{3})$ E) $b^2(4 + 3\sqrt{3})$

19. En el gráfico, calcula el área de la región paralelográmica DILO. Si $m\overset{\frown}{AE} = 3m\overset{\frown}{EL}$ y $\overline{RA}//\overline{DO}$ (L y A son puntos de tangencia).



A) $36\sqrt{3}$ B) $32\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) 36 E) $36\sqrt{2}$

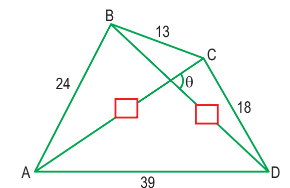
20. Sobre los lados AB y BC de un triángulo ABC se construyen los cuadrados ABFL y BCQR, exteriores al triángulo. Halla el área de la región cuadrangular AFRC, siendo AR = 8.

A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) 32

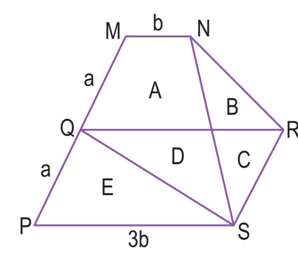
NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Completa los recuadros en la siguiente figura si: $\text{sen}\theta = \dfrac{16\sqrt{290}}{609}$, y el área de la región trapezoidal $\square$ABCD es igual a $8\sqrt{290}$; además, BD y AC son números enteros (AC < BD).



22. En la figura, ▱PQRS es un paralelogramo y ⏢QMNR es un trapecio.

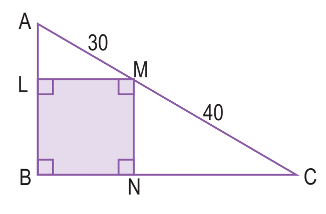


Completa los recuadros con los signos >; < o = según corresponda.

- B ☐ C
- E ☐ 2C
- B ☐ E
- A ☐ E
- D ☐ C

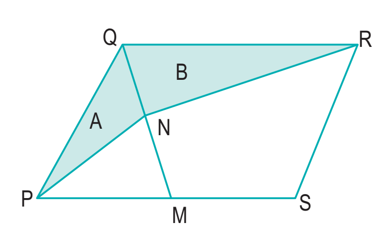
Razonamiento y demostración

23. En la figura, calcula el área de la región limitada por el cuadrado BLMN.



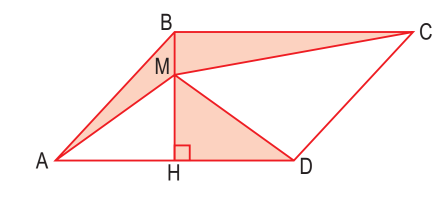
A) 600 B) 592 C) 584
D) 576 E) 560

24. En el gráfico, el área de la región romboidal PQRS es 12 cm^2. Si: MS = 2(PM) y QN = NM, calcula: 3A + B.



A) 4 cm^2 B) 5 cm^2 C) 6 cm^2
D) 7 cm^2 E) 8 cm^2

25. En el gráfico, calcula la razón entre el área de la región romboidal ABCD y el área de la región sombreada, si 2(BM) = MH y AH = HD.



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{12}{5}$ E) $\frac{11}{5}$

26. Si la base de un rectángulo aumenta en 12% y el área no varía, es porque la altura disminuye en:

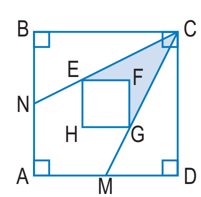
A) $9\frac{5}{7}\%$ B) $11\frac{5}{7}\%$ C) $6\frac{5}{7}\%$ D) $8\frac{5}{7}\%$ E) $10\frac{5}{7}\%$

Resolución de problemas

27. Se tiene un cuadrilátero bicéntrico ABCD tal que AB = 6, BC = 5 y CD = 9. Calcula la medida del radio de la circunferencia inscrita.

A) 1 B) 2 C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 3

28. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 8 m, la región cuadrangular ECGF es de área 4 m^2. EFGH es un cuadrado donde $\overline{EH}//\overline{AB}$ y $\overline{HG}//\overline{AD}$ según se muestra la figura. Si BN = NA, AM = MD, determina EF.



A) $(\sqrt{2} + 4)$ m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) $(4 - 2\sqrt{2})$ m

29. En un cuadrante AOB de radio 2, en $\overset{\frown}{AB}$ se ubica el punto C de modo que la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{OB}$ es igual a $\sqrt{3}$. Calcula el área de la región cuadrangular ACBO.

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

30. Se tiene dos circunferencias concéntricas de centro O. Se traza la cuerda $\overline{AB}$ que es tangente a la circunferencia menor, si los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ intersecan a la circunferencia menor en N y M; respectivamente; OA = R y la m∠AOB = 120°. Calcula el área de la región cuadrangular ANMB.

A) $\frac{R^2\sqrt{3}}{16}$ B) $\frac{2R^2}{15}$ C) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{16}$
D) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{15}$ E) $\frac{7R^2\sqrt{3}}{15}$

Claves

NIVEL 1	7. E	13. C	20. E	26. E
1.	8. C	14. B	NIVEL 3	27. D
2.	9. C	15. B	21.	28. E
3. D	10. D	16. C	22.	29. B
4. B	NIVEL 2	17. B	23. D	30. C
5. C	11.	18. D	24. C	
6. A	12.	19. A	25. D	



Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

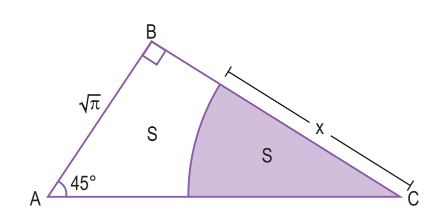
1 Sean las regiones A_1 y A_2 limitadas por dos circunferencias de igual radio, tal que $A_1 \cap A_2 = 100\pi$ m^2 y $A_1 \cup A_2 = 400\pi$ m^2. Halla el radio de las circunferencias.

A) $\sqrt{10}$ m B) $5\sqrt{10}$ m C) $3\sqrt{10}$ m
D) $6\sqrt{10}$ m E) $2\sqrt{10}$ m

2 Halla la longitud del radio de una circunferencia tangente interior a un círculo de radio R, que determina dos regiones equivalentes.

A) $R\sqrt{2}$ B) $2R\sqrt{2}$ C) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{R\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{R\sqrt{2}}{8}$

3 En la figura, calcula el valor de x.

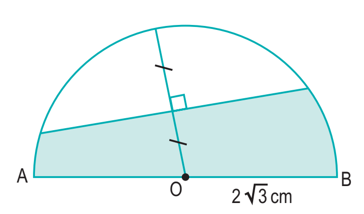


A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) $\frac{\pi}{2}$

4 En un sector circular de ángulo central 60° y radio R se halla inscrita una circunferencia. Halla el área de la región exterior a la circunferencia e interior al sector.

A) $\frac{\pi R^2}{18}$ B) $\frac{\pi R^2}{6}$ C) $\frac{\pi R^2}{3}$
D) $\frac{\pi R^2}{8}$ E) $\frac{\pi R^2}{9}$

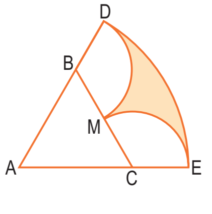
5 En el semicírculo, calcula el área de la región sombreada. (O es centro de la semicircunferencia)



A) $(15\pi - 18\sqrt{3})$ cm^2 B) $(12\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
C) $(9\pi - \sqrt{3})$ cm^2 D) $(8\pi - 2\sqrt{3})$ cm^2
E) $(2\pi + 3\sqrt{3})$ cm^2

6 La longitud del lado del triángulo equilátero ABC es 2a. Sobre las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se toman BD = a y CE = a, trazándose luego los arcos DM y EM con centros en B y C, así como $\overset{\frown}{DE}$ con centro de A. Halla el área de la región encerrada por el triángulo curvilíneo DME.

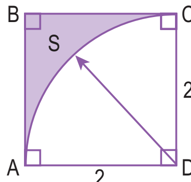
A) $\frac{a^2}{6}(5\pi + \sqrt{3})$
B) $\frac{a^2}{6}(5\pi - 6\sqrt{3})$
C) $\frac{a^2}{8}(5\pi + 3\sqrt{3})$
D) $\frac{a^2}{4}(3\pi - \sqrt{3})$
E) $\frac{a^2}{4}(4\pi - 2\sqrt{3})$



7 Sobre el radio OB de un cuarto de círculo AOB, de centro O, se toma el punto P, de modo que $PB = 2\sqrt{2}$. Con centro en P y radio PB se traza un arco de circunferencia que corta a $\overline{OA}$ en el punto N. Si AN = PB, halla el área de la región encerrada por $\overset{\frown}{AB}$, $\overline{AN}$ y $\overset{\frown}{NB}$.

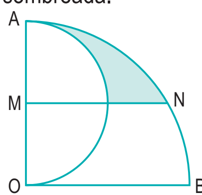
A) $\pi\sqrt{2} + 2$
B) $2(\pi\sqrt{2} - 1)$
C) $\dfrac{\pi\sqrt{2} + 1}{4}$
D) $\dfrac{\pi\sqrt{2} - 1}{2}$
E) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$

8 Calcula el area de la región sombreada.



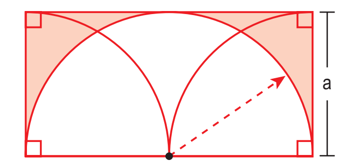
A) $4 - \pi$ B) $2 - \pi$ C) $2 + \pi$ D) 2π E) 4π

9 La figura muestra un cuarto de círculo y un semicírculo. $AM = OM = 2\sqrt{3}$ cm y $\overline{MN} \perp \overline{OA}$. Halla el área de la región sombreada.



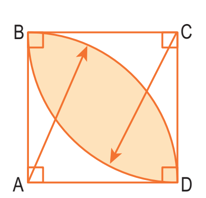
A) $(5\pi - 6\sqrt{3})$ cm^2
B) $(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
C) $(2\pi - \sqrt{3})$ cm^2
D) $(3\pi + \sqrt{3})$ cm^2
E) $(4\pi + 2\pi)$ cm^2

10 En el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada si a = 6 m.



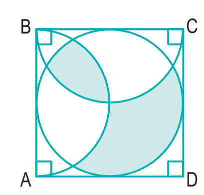
A) $12(6\sqrt{3} - \pi)$
B) $18(4 - \pi)$
C) $6(3\sqrt{3} - \pi)$
D) $36(6\sqrt{3} - \pi)$
E) $36(3\sqrt{3} - \pi)$

11 Halla el área sombreada si el lado del cuadrado mide 4 m.



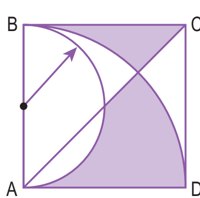
A) $8(\pi - 2)$ m^2
B) $3(4 - \pi)$ m^2
C) $4(\pi - 2)$ m^2
D) $5(\pi + 2)$ m^2
E) $2(\pi - 3)$ m^2

12 Si el lado del cuadrado ABCD mide 4, halla el área de la región sombreada.



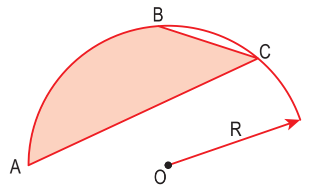
A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) $\dfrac{\pi}{2}$

13 De acuerdo a la figura, ABCD es un cuadrado. Calcula el área de la región sombreada.



A) $r^2(5 - \pi)$
B) $\dfrac{r^2}{2}(5 - \pi/2)$
C) $\dfrac{r^2}{2}(5 - \pi/16)$
D) $\dfrac{r^2}{2}(5 - \pi/4)$
E) $\dfrac{r^2}{2}(5 - \pi/8)$

14 Halla el área de la porción de círculo mostrada, sabiendo que los arcos AB y BC miden 90° y 45°, respectivamente.



A) $\dfrac{\pi R^2}{16}$ B) $\dfrac{\pi R^2}{12}$ C) $\dfrac{\pi R^2}{8}$ D) $\dfrac{\pi R^2}{4}$ E) $\dfrac{\pi R^2}{2}$

Claves

1. B 3. C 5. E 7. B 9. A 11. A 13. B
2. C 4. A 6. B 8. A 10. B 12. B 14. D

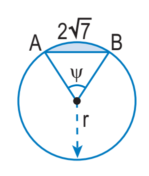
Practiquemos

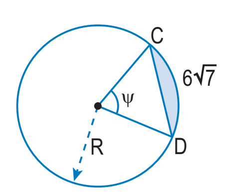


NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Si:

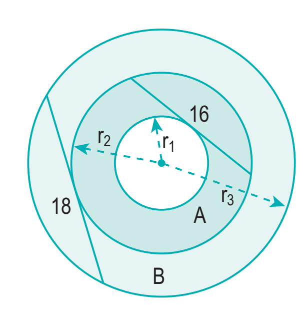




Entonces:

$$\frac{A_{\frown CD}}{A_{\frown AB}} = \frac{\square}{\square} = \square$$

2. De la figura.

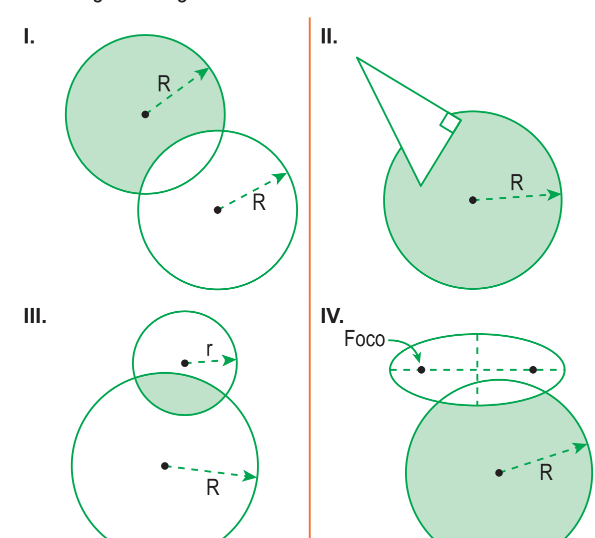


Completa: $A = \dfrac{\square^2\pi}{4}$

$B = \dfrac{\square^2\pi}{4}$

$A + B = \square$

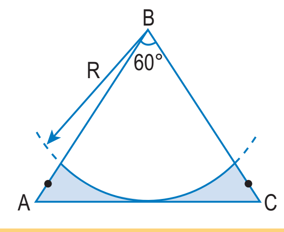
3. De las siguientes gráficas indica cuáles son lúnulas:



A) II B) I C) II y III D) IV E) I y IV

Razonamiento y demostración

4. Halla el área de la región sombreada, si: $R = 4\sqrt{3}$.



A) $4(2\sqrt{3} - \pi)$

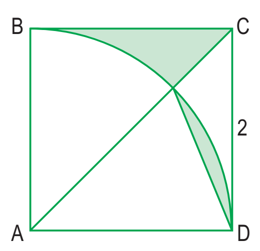
B) $8(2\sqrt{3} - \pi)$

C) $4(\pi - \sqrt{3})$

D) $8(\pi - \sqrt{3})$

E) $4\sqrt{3} - \pi$

5. Si ABCD es un cuadrado, halla el área de la región sombreada.



A) $2 - \sqrt{2}$

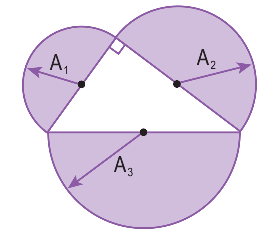
B) $2\pi - \sqrt{2}$

C) $\pi - \sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2} - \pi/2$

E) $\sqrt{2}\,\pi$

6. Del gráfico calcula A_3, si $A_1 = 4\ m^2$ y $A_2 = 6\ m^2$.



A) $12\ m^2$

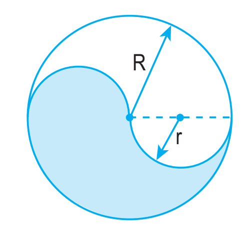
B) $10\ m^2$

C) $14\ m^2$

D) $8\ m^2$

E) $15\ m^2$

7. Halla el área sombreada, si $R = 8$ y $r = 4$.



A) 36π

B) 64π

C) 16π

D) 24π

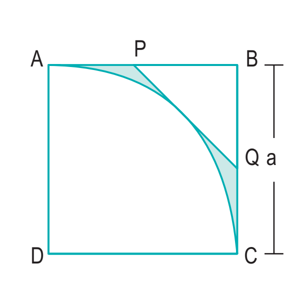
E) 32π

Resolución de problemas

8. Si el área de un círculo se duplica al aumentar su radio en $(\sqrt{2} - 1)$, halla el radio original.

A) 1/2 B) 3/5 C) 1 D) 2 E) 3

9. Halla el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado de lado a y PQ es tangente al arco AC (de centro D), en su punto medio.



A) $\left[\dfrac{8\sqrt{2} - 8 + \pi}{4}\right]a^2$

B) $\left[\dfrac{8\sqrt{2} + 8 - \pi}{4}\right]a^2$

C) $\left[\dfrac{8\sqrt{2} + 6 + \pi}{4}\right]a^2$

D) $\left[\dfrac{8\sqrt{2} + 8}{3}\right]a^2$

E) $\left[\dfrac{8\sqrt{2} - 8 - \pi}{4}\right]a^2$

10. Sea el triángulo ABC, recto en A. Determina el área del círculo circunscrito al triángulo ABQ, donde Q es la intersección de la perpendicular trazada a BC en B y con la prolongación de AC, si AC = 3, BC = 5 y AB = 4.

A) $\dfrac{95}{8}\pi$ B) $\dfrac{100}{7}\pi$ C) $\dfrac{90}{8}\pi$

D) $\dfrac{100}{9}\pi$ E) $\dfrac{100}{12}\pi$

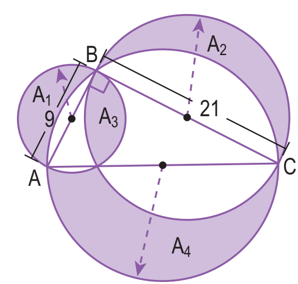
11. El lado de un cuadrado mide 8 m. Calcula el área de la corona circular formada por los círculos inscritos y circunscrito al cuadrado.

A) $8\sqrt{2}\,\pi$ m^2 B) $16\sqrt{2}\,\pi$ m^2 C) $32\sqrt{2}\,\pi$ m^2
D) $64\sqrt{2}\,\pi$ m^2 E) 16π m^2

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Del gráfico



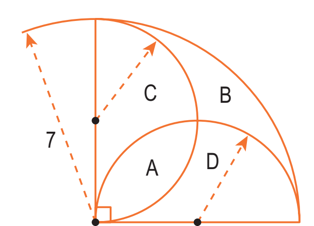
Completa los recuadros con los signos >; < o =, según corresponda.

$A_{\triangle ABC}$ ☐ A_4

$A_{\triangle ABC}$ ☐ $A_1 + A_2$

A_4 ☐ $A_1 + A_3$

13. De la figura:



Se cumple:

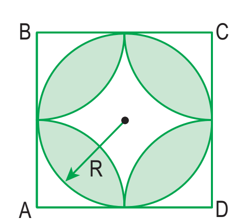
A = ☐

☐ = D

A + B + C + D = ☐

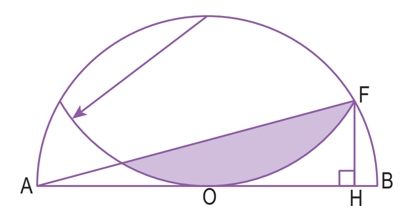
Razonamiento y demostración

14. En la figura, halla el área de la región sombreada: (ABCD: cuadrado).



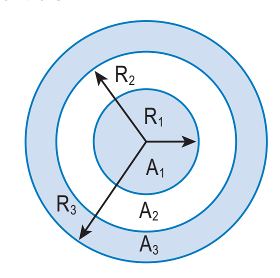
A) $R^2(\pi - 2)$ B) $R^2(\pi + 2)$ C) $2R^2(\pi - 2)$
D) $R^2(3\pi - 3)$ E) $R^2(\pi - 1)$

15. Halla el área de la región sombreada, si $\overline{AB}$ es diámetro, OA = OB, FH = 2, donde O es punto de tangencia.



A) $2\pi - 1$ B) $4\pi - 1$ C) $4\pi - 4$
D) $2\pi - 8$ E) $4\pi - 8$

16. ¿Cuál debe ser la relación de R_1, R_2 y R_3 para que las áreas del círculo A_1 (interior) y los dos anillos A_2 y A_3, respectivamente, sean iguales entre sí?

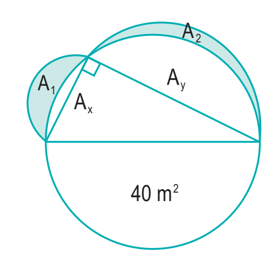


A) $R_1 = \frac{R_2}{2} = \frac{R_3}{3}$ B) $\frac{R_1}{\sqrt{3}} = \frac{R_2}{\sqrt{2}} = R_3$

C) $R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{2}} = \frac{R_3}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{R_1}{2} = \frac{R_2}{4} = \frac{R_3}{5}$

E) $\frac{R_1}{3} = \frac{R_2}{5} = \frac{R_3}{7}$

17. Halla $A_x + A_y$ si: $A_1 = 10$ m^2 y $A_2 = 18$ m^2



A) 10 m^2 B) 15 m^2 C) 18 m^2
D) 12 m^2 E) 28 m^2

Resolución de problemas

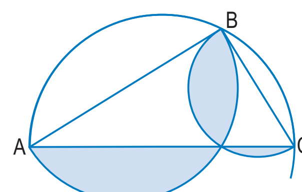
18. En un cuadrado de 8 m de lado, se unen los puntos medios de los lados opuestos formándose cuatro cuadrados. En cada uno de los cuales se inscribe una circunferencia. El área de la región cuadrangular curvilínea que se forma en el centro es:

A) $(12 - 5\pi)$ m^2 B) $(4 - 4\pi)$ m^2 C) $(16 - 4\pi)$ m^2
D) $(64 - 4\pi)$ m^2 E) $(12 - 2\pi)$ m^2

19. Dadas tres circunferencias de radio $\sqrt{2}$, tangente entre sí dos a dos. Calcula el área comprendida entre las tres circunferencias.

A) $\sqrt{2} + \pi$ B) $3\sqrt{2} - \pi$ C) $3\sqrt{2} + \pi$
D) $2\sqrt{3} + \pi$ E) $2\sqrt{3} - \pi$

20. Calcula el área de la región sombreada, si: AC = 20 m; AB = 16 m, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, son diámetros de las circunferencias.



A) $(50\pi - 96)$ m^2 B) $(48\pi - 76)$ m^2

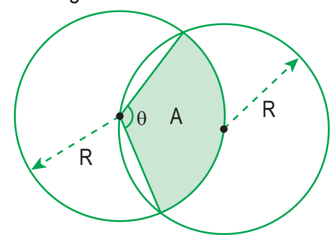
C) $(96\pi - 50)$ m^2 D) $(50\pi - 48)$ m^2

E) $(48\pi - 69)$ m^2

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. De la figura:



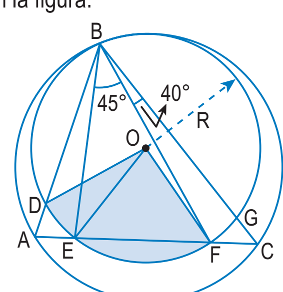
Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. $\frac{A}{R^2} \approx 1{,}047$ ☐

II. Si $A + R^2 = 27$, entonces $R = \frac{9}{\sqrt{\pi + 1}}$ ☐

III. Si $A = 12\pi$, entonces $R = 6$ ☐

22. En la figura:

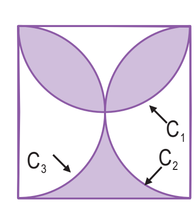


Si $A_{\triangleleft DOE} = 32\pi$,

entonces R = ☐ y $A_{\triangleleft EOF}$ = ☐

Razonamiento y demostración

23. Si: C_1, C_2 y C_3 son semicírculos de radios iguales, entonces, el área de la región sombreada en función de lado L del cuadrado, es:

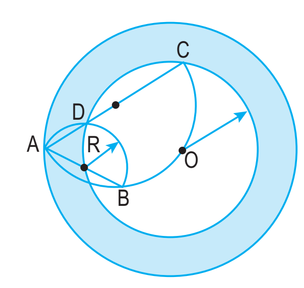


A) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)L^2$ B) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)L^2$

C) $\frac{1}{4}L^2$ D) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)L^2$

E) $\frac{1}{8}\pi L^2$

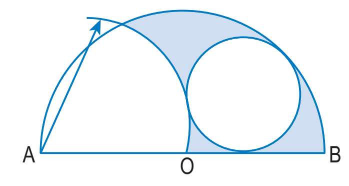
24. Según el gráfico, calcula el área de la región sombreada en función de R.



A) $\frac{\pi R^2}{3}$ B) $2\pi R^2$ C) $4\pi R^2$

D) $\frac{\pi R^2}{2}$ E) $6\pi R^2$

25. Halla el área de la región sombreada, si: AO = OB = R. ($\overline{AB}$: diámetro).

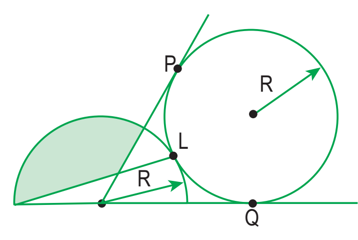


A) $\frac{R^2}{8}(6\sqrt{3} - \pi)$ B) $\frac{R^2}{24}(8\sqrt{3} - 3\pi)$

C) $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{3} - \pi)$ D) $\frac{R^2}{36}(18\sqrt{3} - 5\pi)$

E) $R^2(5\sqrt{3} - \pi)$

26. Según el gráfico, calcula el área de la región sombreada, si $R = 2\sqrt{6}$. Además; L, P y Q, son puntos de tangencia.



A) $(8\pi + 4\sqrt{3} - 9)$ B) $(6\pi - 9\sqrt{3} + 8)$

C) $(12\pi - 9\sqrt{3})$ D) $(4\pi + 9\sqrt{3})$

E) $(8\pi + 3\sqrt{3} - 9)$

Resolución de problemas

27. A es un punto de una circunferencia de radio 1,25. Con centro en A se traza otra circunferencia de igual radio.
El área común a ambos círculos será aproximadamente.

A) 2,24 B) 0,91 C) 1,92
D) 2,82 E) 1,15

28. Un jardín circular de 12 de diámetro está sembrado de pasto; pero es atravesado por un camino pavimentado recto de 3 m de ancho, de modo que uno de sus bordes pasa por el centro. En consecuencia, el área sombreada, en metros cuadrados, es:

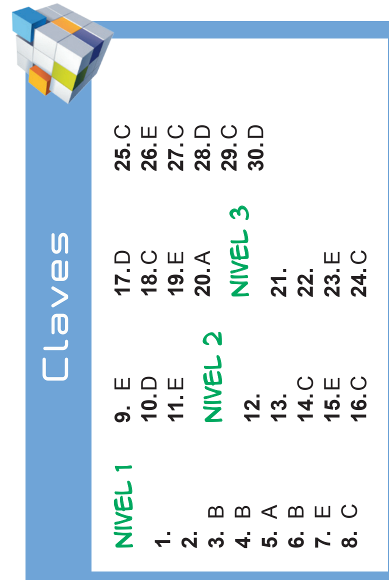
A) $35\pi - 9\sqrt{3}$ B) $30\pi + 9\sqrt{3}$
C) $35\pi + 9\sqrt{3}$ D) $30\pi - 9\sqrt{3}$
E) $30\pi - 6\sqrt{3}$

29. Sea C_1 un disco de metal de 3r de radio y C_2 un disco de radio r, que se retira del disco C_1; se funde el sobrante de los discos para obtener un sector circular de $4\sqrt{2}r$ de radio. ¿Cuál es el ángulo de este sector?

A) 45° B) 53° C) 90°
D) 135° E) 180°

30. Las áreas que limitan dos circunferencias concéntricas son 78,5 m^2 y 28,26 m^2, respectivamente; se traza una cuerda a la circunferencia mayor que es tangente a la menor, entonces la longitud de esa cuerda es: (considerar que $\pi = 3{,}14$).

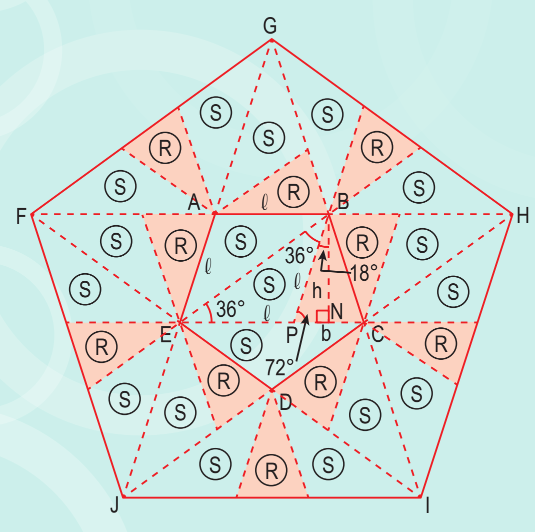
A) 4 m B) 11,66 m C) 7,5 m
D) 8 m E) 6 m



MARATÓN *Matemática*

En un pentágono regular se trazan las diagonales que forman en su interior otro pentágono regular. Halla la razón de sus áreas.

Resolución:



Dividimos los pentágonos regulares ABCDE y FGHIJ en regiones triangulares congruentes ($\textcircled{S}$ y $\textcircled{R}$); luego vemos que:

$A_{\text{⬠}ABCDE} = 3\,\textcircled{S} + \textcircled{R}$ y $A_{\text{⬠}FGMIJ} = 18\,\textcircled{S} + 11\,\textcircled{R}$

Luego, calculamos $\textcircled{S}$ y $\textcircled{R}$ en el pentágono ABCDE; vemos que:

$A_{\triangle PBC} = \textcircled{R} = \frac{1}{2}hb \wedge A_{\triangle EBP} = \textcircled{S} = \frac{1}{2}\ell h$

Pero el ⊿BNP es notable de 18° y 72°.

Asignamos los valores:

$\ell = 4k;\ h = k\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ ;\ b = 2k(\sqrt{5}-1)$

donde b es la base del triángulo PBC (b = PC)

Reemplazando en las fórmulas de áreas:

$\textcircled{R} = \frac{1}{2}(k\sqrt{10+2\sqrt{5}})2k(\sqrt{5}-1)$

$\Rightarrow \textcircled{R} = k^2(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\textcircled{S} = \frac{1}{2}(4k)k\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \textcircled{S} = 2k^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Finalmente nos piden:

$\frac{A_{\text{⬠}FGHIJ}}{A_{\text{⬠}ABCDE}} = x$

$x = \frac{18\,\textcircled{S} + 11\,\textcircled{R}}{3\,\textcircled{S} + \textcircled{R}}$

$x = \frac{(18)2k^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 11k^2(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{(3)2k^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} + k^2(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$x = \frac{36k^2 + 11\sqrt{5}\,k^2 - 11k^2}{6k^2 + k^2\sqrt{5} - k^2}$

$x = \frac{25+11\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)$

$\therefore x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

1. En un triángulo cuyo circunradio mide 14 m, el producto de la longitud del segmento que une el incentro a un vértice y el circunradio del triángulo que se origina al unir el incentro con los otros dos vértices restantes, es igual a 171 m^2.

Halla la longitud del segmento que une el incentro con el circuncentro del primer triángulo.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

2. En un trapezoide ABCD, los diagonales AC y BD se intersecan en el punto P. Si el área del cuadrilátero que tiene por vértices los baricentros de los triángulos ABP, BPC, PCD y APD es 2 cm^2, halla el área del cuadrilátero que se obtiene al trazar paralelas a las diagonales AC y BD, por los vértices A, B, C y D.

A) 18 cm^2 B) 16 cm^2 C) 14 cm^2
D) 20 cm^2 E) 24 cm^2

3. Dado un triángulo ABC, se construyen: el punto simétrico de A respecto de B, el punto simétrico de B respecto de C y el punto simétrico de C respecto de A. Si el área del triángulo ABC es igual a “S”; calcula el área del triángulo que tiene como vértices los puntos construidos.

A) 6S B) $\frac{13}{2}$S C) 7S
D) $\frac{15}{2}$S E) 8S

4. En el triángulo ABC se tiene que AB = 14, BC = 24 y AC = 15; se ubica M en el lado AB y N en el lado BC tal que la recta MN divide al triángulo en dos regiones equivalentes y de igual perímetro. Calcula AM.

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{13}{6}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{11}{5}$

5. Sobre los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC, se tienen los puntos E, F y L, respectivamente, de modo que:

$\overline{EF} // \overline{AC}$ y $\overline{FL} // \overline{AB}$. Demuestra: $\sqrt{S_{\triangle ABC}} = \sqrt{S_{\triangle EBF}} + \sqrt{S_{\triangle LFC}}$


Unidad 3
Geometría

RECUERDA

Gauss y la geometría no euclidiana

Un descubrimiento del siglo XIX que se consideró abstracto e inútil en su tiempo fue la geometría no euclídea. En ella se pueden trazar al menos dos rectas paralelas a una recta dada que pasen por un punto que no pertenece a esta. Aunque descubierta primero por Gauss, este tuvo miedo de la controversia que su publicación pudiera causar. Los mismos resultados fueron descubiertos y publicados por separado por el matemático ruso Nikolái Ivánovich Lobachewski y por el húngaro Johan Bolyai. Las geometrías no euclídeas fueron estudiadas en su forma más general por Riemann, con su descubrimiento de las múltiples paralelas. En el siglo XX, a partir de los trabajos de Einstein, se le han encontrado también aplicaciones en física.

Gauss es uno de los más importantes matemáticos de la historia. Los diarios de su juventud muestran que ya en sus primeros años había realizado grandes descubrimientos en teoría de números, un área en la que su libro *Disquisitiones arithmeticae* (1801) marca el comienzo de la era moderna. En su tesis doctoral presentó la primera demostración apropiada del teorema fundamental del Álgebra. A menudo combinó investigaciones científicas y matemáticas. Por ejemplo, desarrolló métodos estadísticos al mismo tiempo que investigaba la órbita de un planetoide recién descubierto; realizaba trabajos en teoría de potencias junto a estudios del magnetismo, o estudiaba la geometría de superficies curvas a la vez que desarrollaba sus investigaciones topográficas.

Reflexiona

- *Ten la determinación de lograr de tu inteligencia y de tus energías, el mayor desarrollo de cultura y de resultados. Haz que crezcan sin cesar tus conocimientos y tus habilidades. Reflexiona cuidadosamente tus resoluciones y la ordenación de tus actos, con el fin de procurarte el mayor número posible de ventajas y de evitarte todas las dificultades que puedas.*
- *Toma la decisión de que tendrás éxito, luego invierte cada gramo de tu energía mental y física en el esfuerzo a hacerlo realidad.*
- *El éxito no es más que otra manera de nombrar la ilimitada capacidad que tienes tú de llegar a ser más creativo, comprensivo, valiente, humilde, útil, osado, resuelto y dinámico.*








TEMA 1: RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

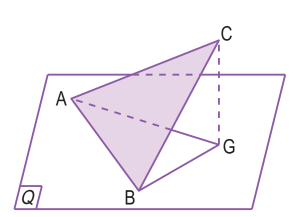
1 Por el vértice A de un triángulo ABC se levanta la perpendicular AM al plano del triángulo, luego se trazan las perpendiculares AP a $\overline{MB}$ y AQ a $\overline{MC}$. Calcula QC, sabiendo que: QM = 5; BP = 4 y PM = 6.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

2 La distancia de un punto P a un plano Q es 24, se traza PM (M se encuentra en el plano Q) de modo que la proyección de $\overline{PM}$ sobre el plano es 7. Halla PM.

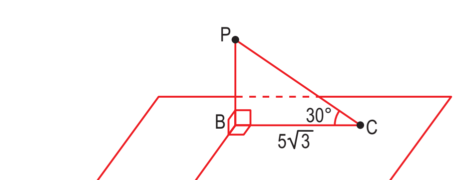
A) 10 B) 12 C) 7
D) 18 E) 25

3 En la figura, G es la proyección de C sobre el plano Q. Si el área del triángulo ABC es 30 y el ángulo diedro que forman ABC y el plano Q mide 37°, calcula el área del triángulo AGB.



A) 18 B) 20 C) 22
D) 15 E) 24

4 En la figura, halla AC, si PA = 13.



A) 20 B) 15 C) $\sqrt{20}$
D) $\sqrt{219}$ E) 30

5 Dos puntos F y G situados a uno y otro lado de un plano Q distan de dicho plano, 6 cm y 9 cm, respectivamente. Por F y G se trazan perpendiculares a dicho plano que lo intersecan en F' y G', respectivamente. Si F'G' = 8 cm, calcula FG.

A) 10 cm B) 12 cm C) 14 cm
D) 15 cm E) 17 cm

6 El diámetro de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC mide $\sqrt{12}$ cm. Por B se levanta $\overline{BE}$, perpendicular al plano del triángulo. Si BE = 1 cm, calcula el área de la región triangular AEC.

A) $\frac{\sqrt{31}}{4}$ cm^2 B) $4\sqrt{31}$ cm^2
C) $\frac{4}{3}\sqrt{31}$ cm^2 D) $\frac{\sqrt{31}}{2}$ cm^2
E) $\frac{3\sqrt{31}}{4}$ cm^2

7 $\overline{BA}$ es un segmento perpendicular al plano del triángulo rectángulo CAD, de modo que AB = AC = AD = 6 cm. Si O es el incentro del triángulo CBD y $\overline{AO}$ es perpendicular a dicho triángulo, calcula la distancia entre O y $\overline{AB}$.

A) 8 cm
B) $6\sqrt{2}$ cm
C) $4\sqrt{3}$ cm
D) $2\sqrt{2}$ cm
E) $2\sqrt{3}$ cm

8 ABC es un triángulo equilátero que pertenece a un plano perpendicular a un cuadrado ABDE, siendo $\overline{AB}$ el lado común. El segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ mide 1 cm. Calcula la longitud del lado del triángulo ABC.

A) 2 cm
B) 1 cm
C) 2,5 cm
D) $\sqrt{3}$ cm
E) $\sqrt{2}$ cm

9 ABC es un triángulo equilátero de lado L, por A se levanta $\overline{AM}$, perpendicular al plano ABC, de modo que 2AM = L. Se une M con B y C; calcula el área de la región triangular BMC.

A) $\frac{L^2}{2}$
B) $\frac{L^2}{3}$
C) $\frac{L^2}{6}$
D) $\frac{L^2}{12}$
E) $2L^2$

10 Un punto P dista 12 cm de un plano. Un segmento de recta AB = 8 cm está en el plano, calcula la distancia desde $\overline{AB}$ al pie de la perpendicular bajada desde P, si AP = BP = 13 cm.

A) 2 cm
B) $2\sqrt{2}$ cm
C) 3 cm
D) $3\sqrt{2}$ cm
E) $\sqrt{6}$ cm

11 P y Q son dos planos perpendiculares. $\overline{AB}$ es diámetro de una semicircunferencia contenida en P y ABMG es un rectángulo contenido en Q. Si AF = 4, FB = 3, siendo F un punto del arco AB y BM = 1; calcula la distancia de F a $\overline{MG}$.

A) 2,6
B) 2,4
C) 2,5
D) 2,8
E) 3

12 Se tiene un triángulo equilátero ABC y por B se levanta la perpendicular $\overline{BD}$ a su plano. Halla la mínima distancia entre $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$, si AB = BD = $\sqrt{21}$ cm.

A) $\sqrt{21}$ cm
B) 3 cm
C) 4 cm
D) $2\sqrt{21}$ cm
E) $3\sqrt{21}$ cm

13 Se tiene un triángulo equilátero ABC y por B se levanta la perpendicular $\overline{BD}$ a su plano. Halla la medida del ángulo de cruce, entre $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$, si AB = BD.

A) $\arctan\sqrt{8}$
B) $\arctan\sqrt{7}$
C) $\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}$
D) 120°
E) 75°

14 Una circunferencia de diámetro AB = 10 y un triángulo isósceles AFB (AF = FB) se encuentran ubicados en planos perpendiculares entre sí, además en la circunferencia está inscrito el trapecio ABLG cuya base mayor es $\overline{AB}$ y cuya altura mide 3. Halla la distancia de F a $\overline{LG}$, si AF = 13.

A) 12
B) $2\sqrt{15}$
C) $3\sqrt{17}$
D) $3\sqrt{15}$
E) $2\sqrt{17}$

Claves

1. C
2. E
3. E
4. D
5. E
6. E
7. D
8. B
9. A
10. C
11. A
12. B
13. B
14. C

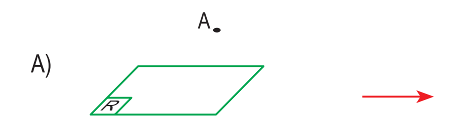
Practiquemos

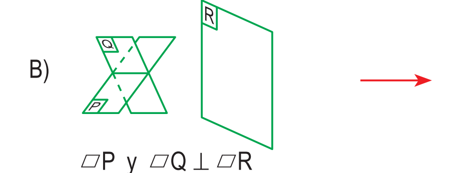


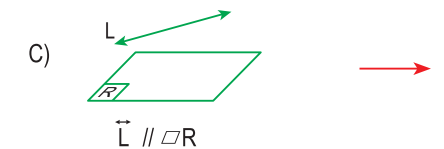
NIVEL 1

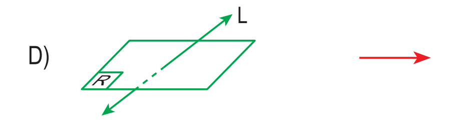
Comunicación matemática

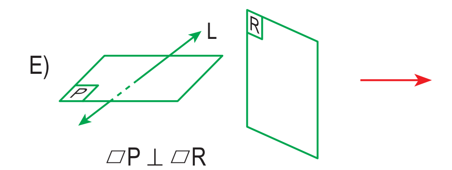
1. Determina las proyecciones sobre el plano R.

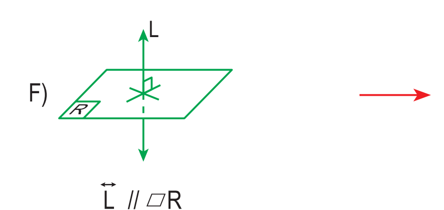
A)


B)


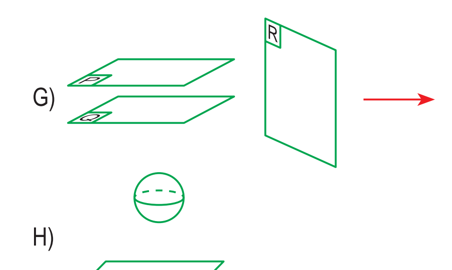
C)


D)


E)


F)


G)

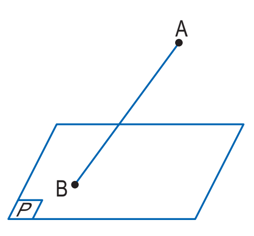
H)


2. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Una recta pertenece a un plano ( )
II. Un punto está incluido en el plano ( )
III. Un punto pertenece a una recta ( )
IV. Una recta puede estar incluido en el plano ( )

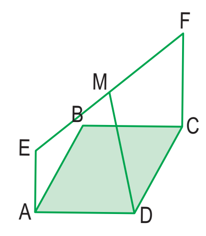
Razonamiento y demostración

3. Si: AB = 13 m y la distancia del punto A al plano P es 12 m. Halla la longitud de la proyección del segmento AB sobre el plano P.



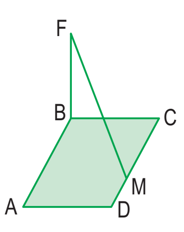
A) 5 m B) 12 m C) 13 m
D) 12,5 m E) 7 m

4. Según el gráfico $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares al plano del cuadrado ABCD cuyo lado mide 6, si AE = 2, CF = 4 y M es punto medio de $\overline{EF}$, calcula MD.



A) 5 B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $3\sqrt{3}$

5. En la figura $\overline{BF}$ es perpendicular al plano del cuadrado ABCD. Si DM = 1, AB = 4 y BF = 12, calcula FM.



A) 14 B) 15 C) 18
D) $12\sqrt{2}$ E) 13

Resolución de problemas

6. Se tienen dos planos paralelos P y Q distantes 4 m. Calcula la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano Q, si: AB = 5 m, el punto A pertenece al plano P y el punto B pertenece al plano Q.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) $\sqrt{2}$ m E) $\sqrt{3}$ m

7. Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano de dicho triángulo. Calcula la distancia de P al punto medio de $\overline{AC}$, si PB = 8 y AC = 12.

A) 15   B) 14   C) 9
D) 10   E) $5\sqrt{6}$

8. Se tiene un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ABQ ubicados en planos perpendiculares. Si AB = 2, calcula la distancia de Q al punto medio de $\overline{CD}$.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{2}$ E) 3

9. Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC recto en B; se traza $\overline{BQ}$ perpendicular al plano que lo contiene. Calcula el área de la región triangular AQC, si: AC = 6 y BQ = 4.

A) 12   B) 15   C) 20
D) 24   E) 18

10. En un cubo, cuyas aristas tienen longitud a. Halla la distancia de un vértice al centro de una cara opuesta.

A) a/2   B) $a\sqrt{2}/2$ C) $a\sqrt{3}/2$
D) $a\sqrt{6}/2$ E) $a\sqrt{2}/2$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

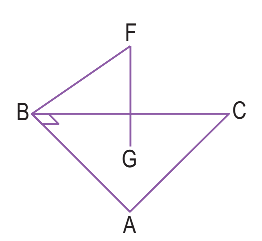
I. En un ángulo triedro la suma de los valores de sus caras varía entre: 180° y 540° ( )
II. En un ángulo triedro la suma de sus ángulos diedros varía entre: 0° y 360° ( )
III. Un ángulo diedro se forma por dos planos ( )
IV. En un ángulo triedro el valor de una cara es mayor a la suma de las otras caras ( )

12. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Dos planos tienen una recta en común ( )
II. Tres puntos colineales pertenecen a una recta ( )
III. Dos puntos coplanarias pertenecen a un plano ( )
IV. Por tres puntos pasa un plano ( )

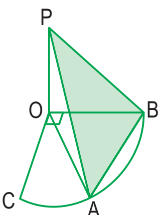
Razonamiento y demostración

13. En la figura $\overline{FG}$ es perpendicular al plano del triángulo ABC. Si G es el baricentro del $\triangle$ABC, AC = 18 y BF = 10, calcula FG.



A) 5   B) 6   C) 8
D) 4   E) $5\sqrt{2}$

14. Si m$\overset{\frown}{AC}$ = 16°; AB = 6; OP = 4 y $\overline{OP}$ es perpendicular al plano que contiene al cuadrante; calcula el área de la región sombreada.



A) $12\sqrt{2}$ B) 16   C) 24   D) $3\sqrt{6}$ E) $5\sqrt{2}$

Resolución de problemas

15. Por el baricentro G de un triángulo rectángulo recto en B se traza $\overline{GH}$ perpendicular al plano que contiene al triángulo. Si 3(BH) = 2(AC), calcula el ángulo entre $\overline{BH}$ y el plano del triángulo.

A) 60°   B) 53°   C) 75°   D) 45°   E) 36°

16. Se tiene un rectángulo ABCD y un triángulo equilátero ABQ ubicados en planos perpendiculares. Si el ángulo entre $\overline{QC}$ y el plano del rectángulo mide 30° y QC = $2\sqrt{3}$, calcula el área de la región rectangular ABCD.

A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{3}$

17. Se tiene un triángulo equilátero ABC y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ ubicados en planos perpendiculares; en $\overset{\frown}{AB}$ se ubica el punto P tal que m$\overset{\frown}{AP}$ = 60° y AB = 4. Calcula la distancia entre los puntos P y C.

A) 6   B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{5}$ E) 4

18. Se tiene un triángulo ABC contenido en el plano P; se trazan $\overline{AD}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$ perpendiculares al plano P situados a un mismo lado del plano. Si AD = 1; BF = 7 y la mediana EM del triángulo DEF es paralela al plano P, calcula CE.

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3   D) $\sqrt{6}$ E) 4

19. Dado un triángulo rectángulo ABC: m∠A = 90°; AB = 6 y AC = 8; $\overline{IH}$ es perpendicular al plano ABC (I: incentro del $\triangle$ABC), IH = 3. Calcula HC.

A) 3   B) 4   C) 9   D) 7   E) 8

NIVEL 3

Comunicación matemática

20. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Una recta se proyecta como un punto en el plano ( )
II. Un punto en el espacio se proyecta como una recta en el plano ( )
III. Un plano se proyecta sobre otro plano como un punto ( )
IV. La proyección de dos rectas alabeadas sobre un plano pueden ser paralelas ( )

21. Indica cuántas proposiciones son falsas:

I. Un triángulo isósceles proyectada sobre un plano puede ser un triángulo isósceles

II. Un triángulo isósceles cuyo lado desigual es paralelo al plano se proyecta como un triángulo isósceles

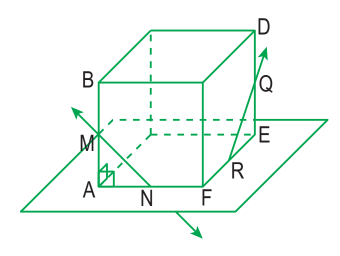
III. Un rectángulo proyectado sobre un plano puede ser un cuadrado

IV. La proyección de dos rectas alabeadas sobre un plano pueden ser rectas secantes

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

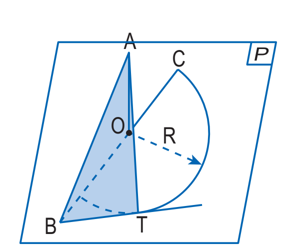
Razonamiento y demostración

22. La figura muestra un cubo. M, N, R y Q, son puntos medios de las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, $\overline{FE}$ y $\overline{DE}$, respectivamente. Halla la medida del ángulo de cruce entre las rectas $\overline{MN}$ y $\overline{RQ}$.



A) 53° B) 30° C) 75° D) 45° E) 60°

23. Según el gráfico, $\overline{OA}$ es perpendicular al plano que contiene al semicírculo. Si $m\overset{\frown}{CT} = 135°$, R = 4 y OA = 3, calcula el área de la región ATB (T es punto de tangencia).

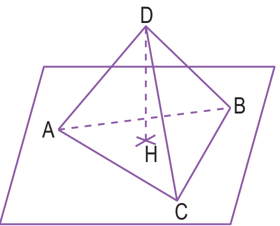


A) 15 B) 12 C) 14 D) $8\sqrt{2}$ E) 10

24. El sólido ABCD de la figura, se llama tetraedro. Las regiones triangulares ABC, ABD, ACD y BCD se llaman caras; los puntos A, B, C y D, son los vértices y las aristas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Se llama altura del tetraedro, a la distancia de un vértice a la cara opuesta. (Por ejemplo DH).

Si las caras del tetraedro son triángulos equiláteros, el sólido es regular.

En un tetraedro regular, cuyas aristas tienen longitud L, halla la longitud de la altura.



A) $L\sqrt{2}/3$ B) $L\sqrt{6}/3$ C) $L\sqrt{3}/3$
D) $L\sqrt{6}/5$ E) $L\sqrt{3}/3$

Resolución de problemas

25. Por el vértice C de un cuadrado ABCD se traza la perpendicular $\overline{CP}$ a su plano. Calcula la medida del ángulo que forma $\overline{OP}$ con el plano que contiene al cuadrado, siendo O centro del cuadrado, además AB = 2 y PA = $\sqrt{10}$.

A) 30° B) 37° C) 60°
D) 53° E) 45°

26. Por el punto medio N del lado CD de un cuadrado ABCD, se traza la perpendicular $\overline{NP}$ al plano de dicho cuadrado. Si M es punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{MB} \cap \overline{AN} = \{O\}$, calcula el área de la región triangular POB, si: 4BM = 5NP = 20 cm.

A) 15 B) 20 C) 30 D) 10 E) 25

27. Por el vértice B de un rectángulo ABCD se levanta una perpendicular $\overline{BP}$ al plano del rectángulo; AC = 10; $m\angle AOD = 127°$ (O: punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$); PB = 4. Calcula el área de la región triangular POC.

A) 10 B) $10\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{3}$
D) 20 E) $10\sqrt{5}$

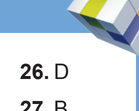
28. En un plano se ubican los puntos A y B; exterior al plano se ubica el punto P de modo que $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ forman ángulos que miden 30° y 45° con dicho plano respectivamente. Si AP = 6, calcula BP.

A) $3\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{6}$
D) 2 E) 3

29. Se tiene un cuadrado ABCD, se traza $\overline{MP}$ perpendicular al plano de dicho cuadrado, siendo M punto medio de $\overline{AB}$. Si AB = 2 y MP = $2\sqrt{3}$, calcula PC.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{17}$ E) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Claves



NIVEL 1			NIVEL 3	
1.	7. D	13. C	20.	26. D
2.	8. C	14. A	21.	27. B
3. A	9. B	15. A	22. E	28. B
4. E	10. D	16. A	23. E	29. D
5. E	NIVEL 2	17. E	24. B	
6. C	11.	18. E	25. E	
	12.	19. D		

Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: POLIEDROS

1 Un poliedro tiene 33 vértices y está conformado por 8 caras triangulares, 9 caras cuadrangulares y m caras pentagonales, halla m.

A) 10 B) 13 C) 7
D) 12 E) 8

2 Halla la suma del número de caras de un dodecaedro regular con el número de vértices de un icosaedro regular.

A) 16 B) 24 C) 30
D) 22 E) 18

3 Calcula la suma de las medidas de los ángulos internos de todas las caras de un poliedro convexo de 20 vértices.

A) 1800° B) 720° C) 6000°
D) 6480° E) 7200°

4 Calcula el número de diagonales de un icosaedro regular.

A) 20 B) 40 C) 36
D) 72 E) 56

5 Halla el área total de un tetraedro regular, siendo la suma de las longitudes de sus aristas 36 cm.

A) 36 cm^2 B) $6\sqrt{3}$ cm^2 C) 24 cm^2
D) $36\sqrt{3}$ cm^2 E) $24\sqrt{3}$ cm^2

6 Halla la relación de áreas de un octaedro regular y un tetraedro regular, sabiendo que la diagonal del octaedro es igual a la altura del tetraedro.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{6}$

7 La arista de un octaedro regular mide a. Halla el área de la sección determinada al intersecar la superficie del poliedro con un plano paralelo a una cara, que pasa por el punto medio de una arista.

A) $3a^2\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{10}a^2\sqrt{3}$

D) $\frac{3}{8}a^2\sqrt{3}$ E) $\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$

8 Se da un cubo de arista a; tomando como referencia un vértice, construya un tetraedro regular uniendo los vértices no adyacentes con rectas contenidas en las caras. Construya un octaedro regular uniendo los centros de cada cara del cubo. La razón entre el área total del tetraedro y el área total del octaedro, es:

A) 1/3 B) 1/2 C) 1

D) 2 E) 3

9 Dado un tetraedro regular de arista a, determina el área total del poliedro que se forma al unir ordenadamente y consecutivamente los puntos medios del poliedro dado (considere: área del tetraedro = A_T).

A) $\frac{A_T}{3}$ B) $\frac{2A_T}{5}$ C) $\frac{A_T}{2}$

D) $\frac{A_T}{4}$ E) $\frac{A_T}{6}$

10 En un octaedro regular la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide 1 cm, calcula el área de la superficie total del octaedro.

A) $2\sqrt{3}$ cm^2 B) $\sqrt{3}$ cm^2

C) $3^2\sqrt{2}$ cm^2 D) $4^2\sqrt{3}$ cm^2

E) $2^2\sqrt{2}$ cm^2

11 Halla el área de la proyección de una cara de un tetraedro regular sobre otra si el área total del tetraedro es 600 m^2.

A) 20 m^2 B) 30 m^2 C) 50 m^2

D) 60 m^2 E) 70 m^2

12 En un tetraedro regular, si el segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas es MN, el lado del tetraedro será:

A) $MN\sqrt{3}$ B) $MN\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $MN\sqrt{2}$

D) $MN\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{3}{2}MN$

13 Considerando como vértices los puntos donde se cortan las dos diagonales de cada cara de un hexaedro regular se obtiene un octaedro, también regular. Si las aristas del hexaedro miden a, calcula el volumen del octaedro.

A) $\frac{a^3}{3}$ B) $\frac{a^3}{4}$ C) $\frac{a^3}{8}$

D) $\frac{a^3}{6}$ E) $\frac{a^3}{12}$

14 ¿Cuál es la relación entre las áreas totales de dos hexaedros regulares, si se sabe que la arista de uno de ellos tiene igual medida que la diagonal del otro?

A) 1/3 B) 2/3 C) 3/2

D) 5/2 E) 1/2

Claves

1. D 3. D 5. D 7. D 9. C 11. C 13. D

2. B 4. C 6. A 8. D 10. A 12. C 14. A

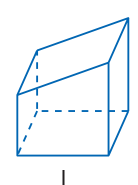
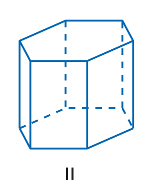
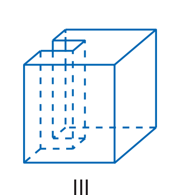
Practiquemos



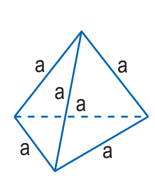
NIVEL 1

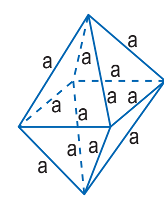
Comunicación matemática

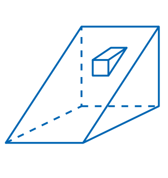
1. Completa los espacios en blanco según corresponda:

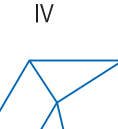
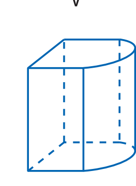
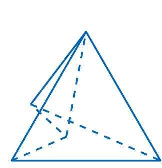
I II III





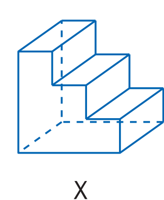
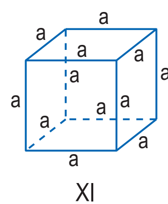


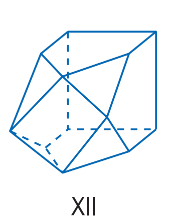
IV V VI




VII VIII IX



X XI XII

A) De las figuras cuáles son poliedros convexos:

____

B) De las figuras cuáles son poliedros no convexos:

____

C) De las figuras cuáles son poliedros irregulares:

____

D) De las figuras cuáles son poliedros regulares:

____

E) Qué figura no es un poliedro:

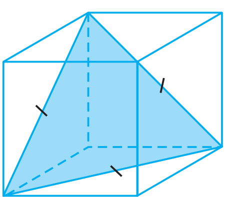
____

2. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. En un poliedro irregular no se cumple el teorema de Euler. ( )
II. Un poliedro no convexo es un poliedro irregular. ( )
III. Un poliedro regular es un poliedro convexo. ( )
IV. Si un poliedro no cumple el teorema de Euler, es un poliedro convexo. ( )

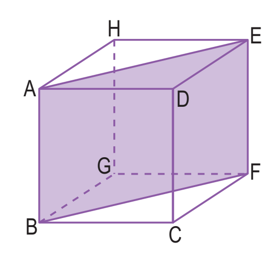
Razonamiento y demostración

3. Halla el área de la región sombreada, si el sólido es un cubo de arista a.



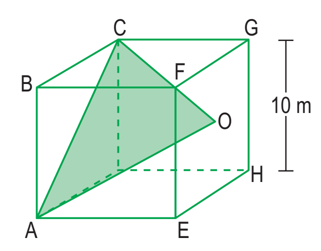
A) $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $a^2\frac{\sqrt{3}}{8}$
D) $a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $a^2\sqrt{2}$

4. En el cubo que se muestra, el lado mide 6 cm. Determina el área de la región rectangular ABFE.



A) 36 cm^2 B) $36\sqrt{2}$ cm^2 C) $18\sqrt{2}$ cm^2
D) 18 cm^2 E) 72 cm^2

5. En el cubo mostrado O es el centro de la cara EFGH. Calcula el área de la región triangular AOC.



A) $80\sqrt{2}$ m^2 B) $50\sqrt{2}$ m^2 C) $20\sqrt{5}$ m^2
D) $20\sqrt{2}$ m^2 E) $25\sqrt{3}$ m^2

Resolución de problemas

6. En un poliedro la suma de los números de caras, vértices y aristas es 32. Calcula el número de aristas.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

7. El volumen de un cubo de arista 1 equivale a k veces lo que mide su diagonal. Calcula k.

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ E) 3

8. En un cubo de $3\sqrt{2}$ m de arista se une tres vértices no consecutivos. Halla el área de la región triángular formada.

A) $9\sqrt{3}\ m^2$ B) $\frac{9\sqrt{3}}{2}\ m^2$ C) $18\sqrt{6}\ m^2$
D) $18\sqrt{3}\ m^2$ E) $27\sqrt{3}\ m^2$

9. La arista de un cubo mide 2. Calcula la distancia desde un vértice hacia el centro de la cara opuesta.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

10. Halla el ángulo formado por las diagonales de dos caras contiguas de un cubo, si ambas diagonales parten del mismo vértice.

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 15° E) 75°

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. El teorema de Euler se cumple para todos los poliedros. ( )

II. Si el número de caras de un poliedro es igual al número de vértices de otro y viceversa, entonces dichos poliedros son conjugados. ( )

III. Un hexaedro de caras regulares es un poliedro regular. ( )

A) VVF B) VFV C) VFV
D) FFV E) FFF

12. ¿Cuáles son verdaderas?

I. Para algunos poliedros no convexos el teorema de Euler aún es válido. ( )

II. Todos los hexaedros tienen cuatro diagonales. ( )

III. El poliedro conjugado de un icosaedro es un dodecaedro. ( )

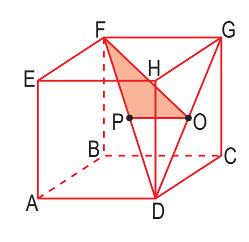
A) I y III B) Solo I C) Solo II
D) II y III E) I y II

Razonamiento y demostración

13. La figura muestra un cubo en el cual se pide el ángulo que forman las rectas alabeadas BE y CF.

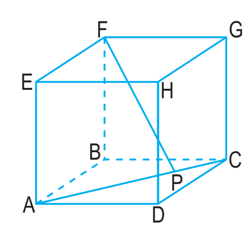
A) 45°
B) 30°
C) 60°
D) 70°
E) 37°

14. En la figura ABCD – EFGH es un hexaedro regular. Si AB = 6, calcula el área de la región sombreada, si O: centro del cuadrado DHGC y P: centro del hexaedro.



A) $5\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $1,5\sqrt{2}$
D) $4,5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

15. La figura muestra a un hexaedro regular ABCD – EFGH.
Si: AP = 6 y PC = 2, calcula PF.



A) $\sqrt{26}$ B) $4\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{13}$
D) $\sqrt{13}$ E) $2\sqrt{26}$

Resolución de problemas

16. Calcula la distancia de un vértice a la diagonal de un cubo, en el cual su área es igual a 24 m^2.

A) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ m B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m
D) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ m E) $\sqrt{6}$ m

17. En un cubo la distancia de un vértice al centro de la cara opuesta es de 3 m. Calcula su arista.

A) $\sqrt{3}$ m B) $\sqrt{2}$ m C) $\sqrt{6}$ m
D) $\sqrt{7}$ m E) $2\sqrt{2}$ m

18. Si la distancia de un vértice a la diagonal del cubo mide $\sqrt{6}$ m, halla el volumen.

A) 8 m^3 B) 12 m^3 C) 27 m^3
D) 64 m^3 E) 32 m^3

19. Calcula el área total del sólido que se forma al unir los puntos medios de las caras de un cubo de 8 m^3 de volumen.

A) $2\sqrt{3}\ m^2$ B) $4\sqrt{3}\ m^2$ C) $4\sqrt{2}\ m^2$
D) $8\sqrt{2}\ m^2$ E) $8\sqrt{3}\ m^2$

20. Halla la distancia entre los baricentros de dos caras de un tetraedro regular de arista 3.

A) 2 B) 1/3 C) 4
D) 1 E) 3

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Existe un poliedro que tiene 7 aristas. ( )
II. Existen tres poliedros conjugados. ( )
III. Existe un poliedro regular no convexo. ( )

A) VFF B) VVF C) FFF
D) VVV E) FVV

22. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Todos los poliedros regulares están inscritos en una esfera. ( )
II. Si una recta interseca un sólido en 2 puntos, significa que es un sólido convexo. ( )
III. El segundo teorema de poliedros se cumple para todos los poliedros no convexos. ( )

A) VFF B) VVV C) VFV
D) FVV E) FFF

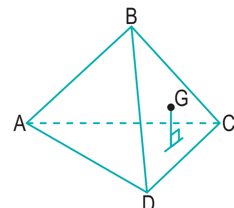
23. La figura muestra a un tetraedro regular P-ABC. Calcula AM, si $\overline{PG}$ es altura, PM = MG y PB = 4.

A) $2\sqrt{3}$
B) 4
C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{2}$
E) $\sqrt{3/2}$

24. La figura muestra a un hexaedro regular ABCD-EFGH. Si M y N bisecan a $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ en O, y OM = 2. Calcula: FO

A) 8
B) 12
C) 10
D) 16
E) 20

25. La figura muestra a un tetraedro regular B – ACD. G es baricentro de la cara BCD. Calcula la distancia de G a la base ADC, si BC = 3.



A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\sqrt{6}$

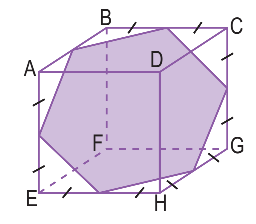
Resolución de problemas

26. En un octaedro regular de arista "a", halla la distancia del centro a una cara. Si a = $\sqrt{6}$

A) 6 B) $\sqrt{6}$ C) 1
D) 2 E) 1/6

27. En la figura se pide la arista del cubo sabiendo que el área de la región sombreada es $3\sqrt{3}\ m^2$.

A) $\sqrt{2}$ m
B) $\sqrt{3}$ m
C) 1 m
D) 2 m
E) 3 m



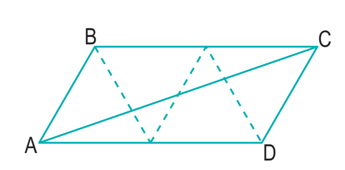
28. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide L, calcula el área de la superficie total del octaedro.

A) $L^2\sqrt{3}$ B) $3L^2\sqrt{3}$ C) L^2
D) $2L^2\sqrt{3}$ E) $L\sqrt{3}$

29. Halla el área del octaedro regular donde la distancia entre los centros de gravedad de dos caras opuestas que tienen un vértice común es 2/3.

A) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

30. La figura muestra el paralelogramo ABCD, el cual es el resultado de desarrollar la superficie de un tetraedro regular. Si AC = $4\sqrt{7}$, calcula la medida de la altura de dicho tetraedro.



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$
D) 2 E) $\sqrt{6}$

Claves

NIVEL 1	7. B	13. C	20. D	26. C
1.	8. A	14. D	NIVEL 3	27. D
2.	9. C	15. C	21. C	28. D
3. A	10. B	16. C	22. C	29. B
4. B	NIVEL 2	17. C	23. D	30. C
5. B	11. E	18. C	24. B	
6. D	12. A	19. B	25. C	

Aplicamos lo aprendido





TEMA 3: PRISMA

1 El área total de un prisma regular hexagonal es el triple de su área lateral. Halla el volumen del prisma, si el lado de la base mide 2 m.

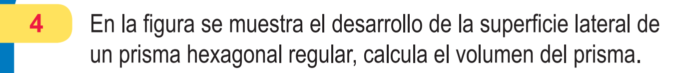
A) $9\ m^3$ B) $8\ m^3$ C) $10\ m^3$
D) $5\ m^3$ E) $4\ m^3$

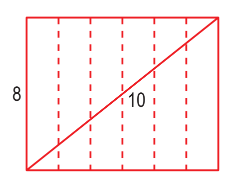
2 Si las aristas de un cubo se aumentan en 2; 4 y 6, respectivamente, el volumen del paralelepído obtenido excede en 568 al volumen del cubo inicial. Halla la longitud de la diagonal de este cubo.

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

3 Un prisma recto cuyas bases son cuadrados de 4 cm de lado tiene un área total de 144 cm^2, calcula su volumen.

A) $100\ cm^3$ B) $110\ cm^3$ C) $115\ cm^3$
D) $113\ cm^3$ E) $112\ cm^3$

4 
En la figura se muestra el desarrollo de la superficie lateral de un prisma hexagonal regular, calcula el volumen del prisma.

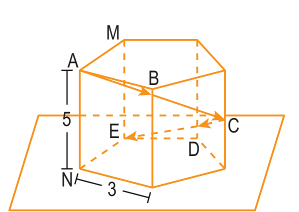


A) $12\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

5 Calcula el área lateral de un prisma triangular ABC-A'B'C', si A'B' = 24 cm y A'C' = 10 cm, además la altura del prisma es igual al diámetro de la circunferencia inscrita en la base inferior, siendo la $m\angle B'A'C' = 90°$.

A) $240\ cm^2$ B) $320\ cm^2$ C) $420\ cm^2$
D) $480\ cm^2$ E) $960\ cm^2$

6 La figura muestra una caja en forma de un prisma regular pentagonal. Una astuta hormiga, parte de A, en busca de su comida en E, siguiendo la trayectoria ABCDE, de menor longitud posible, debido a que la cara ANEM está rociada con un insecticida. Halla la longitud de dicha trayectoria.



A) 9 B) 13 C) 42
D) 28 E) 32

7 Calcula el volumen de un prisma recto triangular en el cual el área de una cara lateral es 20 m^2, mientras que la distancia desde la arista opuesta hacia dicha cara es 6 m.

A) 120 m^3 B) 90 m^3 C) 60 m^3
D) 75 m^3 E) 80 m^3

8 Un prisma tiene por base un rectángulo de lados 5 y 4 m, sus aristas laterales miden 6 m y están inclinadas 30° sobre el plano de la base y se proyectan siguiendo la dirección de los menores lados del rectángulo de la base. Calcula el área total del prisma.

A) 124 m^2 B) 114 m^2 C) 130 m^2
D) 140 m^2 E) 150 m^2

9 En un paralelepípedo rectangular las diagonales de las caras miden $\sqrt{61}$, $\sqrt{106}$ y $\sqrt{117}$ cm. Calcula el volumen del paralelepípedo.

A) 240 cm^3 B) 250 cm^3 C) 210 cm^3
D) 230 cm^3 E) 270 cm^3

10 Un prisma recto tiene por bases, cuadrados inscritos en circunferencias de radio R. La superficie lateral es igual a nR^2. Calcula la altura del prisma.

A) $\frac{n\sqrt{2}R}{8}$ B) $\frac{n\sqrt{2}R}{6}$ C) $\frac{n\sqrt{2}R}{12}$
D) $\frac{n\sqrt{2}R}{4}$ E) $\frac{n\sqrt{2}R}{3}$

11 Halla el volumen del tronco de prisma recto cuya base es un triángulo isósceles ABC de lados $AB = AC = \sqrt{116}$ m y $BC = 8$ m; las aristas laterales están en progresión aritmética, midiendo la intermedia 3 m.

A) 100 m^3 B) 120 m^3 C) 110 m^3
D) 140 m^3 E) 150 m^3

12 La base de un tronco de prisma oblicuo triangular, tiene área 12. Halla el volumen del sólido, sabiendo que las aristas laterales estan inclinadas 60° respecto a la base y tiene longitudes 3, 4, 5, respectivamente.

A) $24\sqrt{3}$ B) 20 C) 30
D) $10\sqrt{3}$ E) $32\sqrt{2}$

13 Halla el volumen de un prisma regular de 12 aristas, si podemos trazar una circunferencia de radio R que es tangente a 2 aristas laterales opuestas y toca a cada base en un punto.

A) $8R^3$ B) $3R^3$ C) $6R^3$
D) $2R^3$ E) $4R^3$

14 El volumen del prisma regular ABC–A'B'C' es 18 cm^3. Se toman M y N, puntos medios de las aristas laterales $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$, respectivamente. Las prolongaciones de $\overline{A'N}$ y $\overline{AC}$ se cortan en P y las de $\overline{A'M}$ y $\overline{AB}$ en Q. Halla el volumen del poliedro MBCNPQ.

A) 14 cm^3 B) 12 cm^3 C) 10 cm^3
D) 8 cm^3 E) 6 cm^3

Claves

1. A 2. D 3. E 4. A 5. D 6. B 7. C 8. A 9. E 10. A 11. B 12. A 13. E 14. B

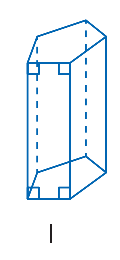
Practiquemos



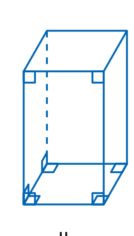
NIVEL 1

Comunicación matemática

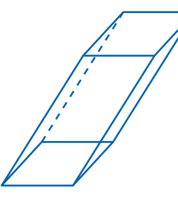
1. De las figuras:



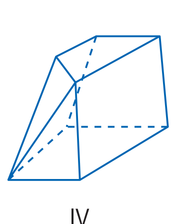
I



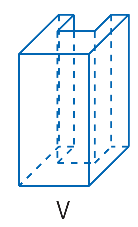
II



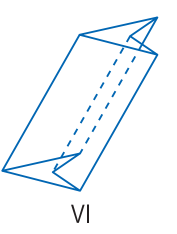
III



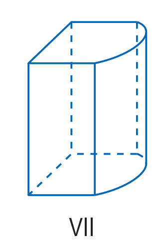
IV



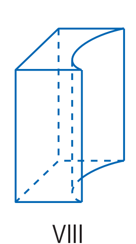
V



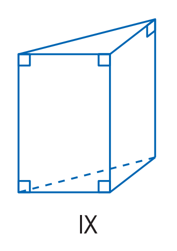
VI



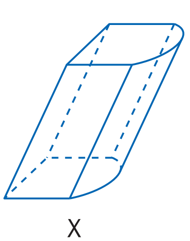
VII



VIII



IX



X

A) ¿Qué sólidos son no convexos?

B) ¿Qué sólidos son convexos?

C) ¿Qué sólidos no son prismas?

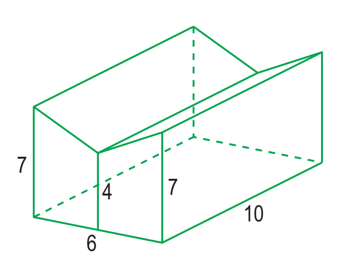
2. De las figuras:

A) ¿Cuáles son prismas rectos?

B) ¿Cuáles son prismas cuadrangulares?

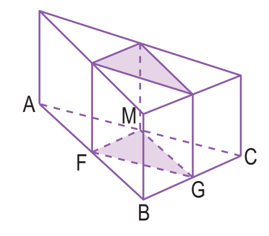
Razonamiento y demostración

3. Calcula el volumen de agua contenido en el sólido mostrado.



A) 350
B) 170
C) 300
D) 270
E) 330

4. En la figura se tienen dos troncos de prisma triangulares regulares. Halla la relación entre sus áreas laterales si F, M y G son los puntos medios de AB, BC y AC.



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución de problemas

5. Calcula el volumen de un prisma recto de x metros de altura, si su base es un hexágono regular de x/2 de lado.

A) $3\sqrt{3}x^3$
B) $\frac{3\sqrt{3}}{8}x^3$
C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3$
D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}x^3$
E) $\frac{5}{8}\sqrt{3}x^3$

6. Halla el volumen de un prisma recto cuyas aristas laterales miden 16 cm y su base es un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

A) 400 cm^3
B) 500 cm^3
C) 600 cm^3
D) 1200 cm^3
E) 800 cm^3

7. En un prisma cuadrangular regular, el segmento que une el centro de una base con el punto de intersección de las diagonales de una cara lateral mide 4 y además forma con dicha base un ángulo que mide 60°. Calcula el volumen de dicho prisma.

A) 64
B) $64\sqrt{3}$
C) 48
D) $48\sqrt{2}$
E) 86

8. Halla el área lateral de un prisma oblicuo, cuya sección recta es un hexágono regular de área $24\sqrt{3}$. La altura es $3\sqrt{3}$ y las aristas forman ángulos de 60° con la base.

A) 144
B) 180
C) 50
D) 140
E) 100

9. Halla el volumen de un prisma oblicuo triangular sabiendo que el área de una cara lateral es 5 cm^2 y la distancia de la arista opuesta a esta es 10 cm.

A) 20 cm^3 B) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm^3 C) 30 cm^3
D) 10 cm^3 E) 25 cm^3

10. La base de un prisma recto es base de un tetraedro regular de altura $2\sqrt{6}$ cm, y el área lateral del prisma es igual al área total del tetraedro. Halla el volumen del prisma.

A) 50 cm^3 B) 54 cm^3 C) 60 cm^3
D) 40 cm^3 E) 20 cm^3

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica cuáles premisas son falsas:

I. Un prisma recto siempre está inscrito en un cilindro recto. ( )
II. Un prisma oblicuo siempre está inscrito en un cilindro oblicuo. ( )
III. Dos prismas congruentes tienen el mismo volumen. ( )
IV. Dos prismas semejantes tienen la misma altura. ( )

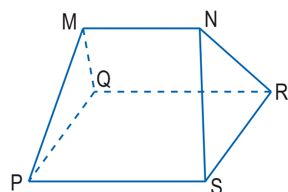
A) Solo I B) Solo III C) I y II
D) III y IV E) Solo IV

12. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Dos prismas semejantes pueden ser iguales ( )
II. Dos prismas con diferentes bases son semejantes ( )
III. Dos prismas semejantes pueden tener alturas iguales ( )
IV. Si dos prismas son semejantes y uno tiene base hexagonal no convexa el otro tendrá base hexagonal no convexa ( )

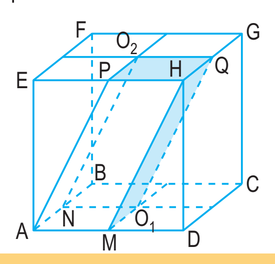
Razonamiento y demostración

13. Halla el volumen del poliedro mostrado, sabiendo que la base es un rectángulo de dimensiones 5 y 12 m; $\overline{MN}$ dista de la base 10,5 m. Las caras laterales están formadas por los trapecios PMNS y QMNR; por los triángulos isósceles PMQ y SNR. Además MN = 4m.



A) 145 m^3
B) 200 m^3
C) 245 m^3
D) 345 m^3
E) 260 m^3

14. En el hexaedro ABCD-EFGH de arista “2a”; M; N; P y Q, son puntos medios de las aristas. O_1 y O_2 son centros de las caras. El área lateral del prisma oblicuo es:



A) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{5}+2)$ B) $a^2(\sqrt{5}+1)$ C) $a^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)$
D) $2a^2(\sqrt{5}+2)$ E) $\frac{a^2}{4}(\sqrt{5}+2)$

Resolución de problemas

15. En un prisma oblicuo de bases regulares la proyección del vértice A sobre la base PQR coincide con el centro de dicha base. Si la arista básica mide L y las aristas laterales están inclinadas 30° respecto a la base, entonces el volumen del prisma hexagonal de base regular inscrito en el prisma triangular es:

A) $\frac{L^3\sqrt{3}}{18}$ B) $\frac{L^3\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{L^3\sqrt{2}}{18}$
D) $\frac{L^3\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{L^3}{3}$

16. En un prisma cuadrangular regular el ángulo entre la diagonal y una cara lateral mide 30° y el área de la base es 4 cm^2. Calcula la longitud del menor recorrido para ir de un extremo de dicha diagonal al otro sobre la superficie lateral del prisma.

A) $\sqrt{6}$ cm B) $\sqrt{7}$ cm C) $2\sqrt{6}$ cm
D) $2\sqrt{7}$ cm E) $\sqrt{11}$ cm

17. En un prisma la medida del diedro determinado por su base y la sección recta es a. Calcula la medida del ángulo que forma la arista lateral con la base de dicho prisma.

A) 180° − a B) 180° − 2a C) 90° − a
D) 90° − 2a E) 45° + a

18. En un tronco de prisma triangular recto, la base ABC es una región equilátera y las aristas laterales miden 8; 5 y 4 cm. Si el volumen del tetraedro determinado por la base superior y el vértice B es $12\sqrt{3}$ cm^3, calcula el área de la base.

A) $5\sqrt{3}$ cm^2 B) $6\sqrt{3}$ cm^2 C) $9\sqrt{3}$ cm^2
D) $8\sqrt{3}$ cm^2 E) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm^2

19. Calcula el área lateral de un prisma oblicuo, cuya sección recta es un hexágono regular de $30\sqrt{3}\,m^2$ de superficie, la altura del prisma es $10\sqrt{3}$ m y las aristas están inclinadas 60° con respecto a la base.

A) $120\sqrt{5}\,m^2$ B) 360 m^2 C) 240 m^2
D) 180 m^2 E) $240\sqrt{5}\,m^2$

20. En un tronco de prisma recto de aristas laterales 3; 4; 5 m, la base es un triángulo cuya área se desconoce.
Halla el volumen del sólido si la otra base mide 12 m y está contenida en un plano que forma un diedro de 60° con el plano de la base desconocida.

A) $24\sqrt{3}$ m^3 B) $10\sqrt{5}$ m^3 C) 20 m^3
D) $4\sqrt{2}$ m^3 E) 8 m^3

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Marca la alternativa correctamente:

I. Dos prismas congruentes tienen bases poligonales congruentes. ( )

II. Dos prismas oblicuas congruentes tienen el mismo ángulo de inclinación. ( )

III. Dos prismas de igual volumen son congruentes. ( )

IV. Dos prismas de igual altura e igual área lateral son congruentes. ( )

A) VVFF B) VFVF C) FVFV D) FFVV E) VVVV

22. Indica cuántas son falsas:

I. Dos troncos de prismas semejantes tienen la misma forma poligonal en las bases. ( )

II. En un prisma oblicuo el área de la sección recta es mayor al área de la base. ( )

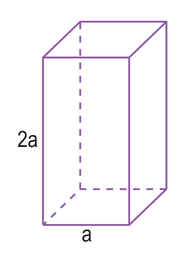
III. En un tronco de prisma oblicuo el área de la sección recta es paralelo una de las bases. ( )

IV. En un prisma oblicuo la altura es mayor a la arista lateral. ( )

A) 4 B) 2 C) 1 D) 3 E) 0

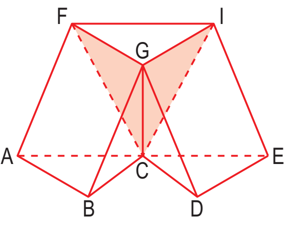
Razonamiento y demostración

23. La figura muestra a un prisma recto cuadrangular regular lleno de agua. Dicho prisma se inclina "α" apoyándose en una arista básica. Sabiendo que el volumen del líquido derramado es los $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$ partes del recipiente. Halla α.



A) 30° B) 60° C) 85° D) 15° E) 45°

24. Sean ABCIGF y CDEIGF dos prismas iguales incrustados oblicuamente. La base común es el triángulo equilátero FGI cuya longitud de su lado es "3a". Las aristas miden "2a" y están inclinadas 60° respecto al plano de sus bases no comunes ABC y CED. Calcula el volumen de las partes no comunes a los dos prismas.



A) $2,5a^3$ B) $4,5a^3$ C) $4a^3$ D) $5,5a^3$ E) a^3

Resolución de problemas

25. Un prisma recto de 10 cm de altura, tiene por base a un cuadrilátero inscriptible, que se descompone por una de sus diagonales en un triángulo equilátero de 12 cm de lado y el otro isósceles. Calcula el volumen del prisma.

A) $230\sqrt{2}$ cm^3 B) $720\sqrt{3}$ cm^3 C) $480\sqrt{3}$ cm^3
D) 360 cm^3 E) $480\sqrt{2}$ cm^3

26. Las bases de un prisma recto son los romboides ABCD y EFGH, en la arista DH se ubica el punto medio M; en la arista AE se ubica el punto P. Si el volumen del tronco de prisma PBM–EFH es los $\frac{2}{5}$ del prisma dado y AP = 2. Calcula PE.

A) 12 B) 9 C) 18 D) 6 E) 15

27. En un prisma triangular de base regular cuyo lado mide $a\sqrt{3}$, la arista lateral forma con la base un ángulo de medida a y la proyección de uno de los vértices coincide con el centroide de la base. Calcula el volumen del prisma.

A) $\sqrt{3}a^2\text{sen}\alpha$ B) $\sqrt{2}a^3\cos\alpha$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3\tan\alpha$
D) $\sqrt{2}a^3\sec\alpha$ E) $270\sqrt{5}$

28. Halla el volumen de un tronco de prisma recto, cuyas bases son un triángulo equilátero FED y un triángulo rectángulo isósceles ABC. Además, una cara lateral es un rectángulo de lados $3\sqrt{2}$ y 6, siendo los mayores lados las aristas laterales.

A) 20 B) 15 C) 31,5 D) 30 E) 4

29. En un prisma oblicuo triangular el área de una cara lateral ABCD es 5, el área de la base es 12. Sabiendo que las aristas laterales están inclinadas 60° respecto a la base y tienen longitud 4, calcula la distancia de la arista opuesta a la cara ABCD.

A) $40\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $41\frac{\sqrt{3}}{5}$ C) $43\frac{\sqrt{3}}{5}$
D) $44\frac{\sqrt{3}}{5}$ E) $48\frac{\sqrt{3}}{5}$

30. En un prisma triangular regular, los centros de sus caras laterales y el centro de una base son los vértices de un tetraedro regular cuya superficie total tiene por área $9\sqrt{3}$ m, entonces el volumen del prisma es:

A) $50\sqrt{2}$ m^3 B) $52\sqrt{2}$ m^3 C) $54\sqrt{2}$ m^3
D) $56\sqrt{2}$ m^3 E) $58\sqrt{2}$ m^3

Claves

NIVEL 1	**7.** B	**13.** C	**20.** A	**26.** C
1.	**8.** A	**14.** D	**NIVEL 3**	**27.** C
2.	**9.** E	**15.** A	**21.** A	**28.** C
3. E	**10.** B	**16.** C	**22.** D	**29.** E
4. B	**NIVEL 2**	**17.** C	**23.** D	**30.** C
5. B	**11.** E	**18.** E	**24.** B	
6. E	**12.**	**19.** E	**25.** C	

Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: CILINDRO

1 Halla la relación del área total de un cubo y el área lateral de un cilindro de revolución, si el cubo está inscrito en el cilindro.

A) $3\sqrt{2}/\pi$ B) $\sqrt{2}/\pi$ C) $3\sqrt{2}/\pi$
D) $1/\pi$ E) $2/\pi$

2 En un cilindro de revolución cuya área lateral es 24 m^2 y de altura 3 m, halla la menor distancia para trasladarse desde el borde de la base superior al borde de la base inferior, diametralmente opuesta (trasladándose por la superficie del cilindro).

A) 5 m B) 6 m C) 7 m
D) 8 m E) 9 m

3 Halla el volumen de un cilindro de revolución de 64 m^2 de área total y además: $\frac{1}{r}+\frac{1}{h}=\frac{1}{4}$
(r = radio de la base; h = altura).

A) 32 m^3 B) 128 m^3 C) 210 m^3
D) 245 m^3 E) 260 m^3

4 Si las áreas de las superficies laterales de dos cilindros de revolución semejantes, son entre sí como 4 a 9, siendo el volumen del menor 16π. Calcula el volumen del mayor.

A) 24π B) 36π C) 81π
D) 45π E) 54π

5 Un cilindro circular recto está inscrito en un cubo de arista 2a. El volumen del cilindro es 16π m^3. Calcula el volumen del cubo.

A) 64 m^3 B) 48 m^3 C) 56 m^3
D) 36 m^3 E) 42 m^3

6 Un cilindro de revolución, cuya altura es igual al diámetro de la base, tiene un área total de 12π m^2. Calcula su volumen.

A) $4\pi\sqrt{2}$ m^3 B) 16π m^3 C) $8\sqrt{2}$ m^3
D) 32π m^3 E) 36π m^3

7 En un cilindro circular recto, el área de la sección perpendicular a la generatriz es M y el área de la sección que contiene al eje del cilindro es N. Halla el volumen del cilindro.

A) $\frac{\pi\sqrt{N}}{2}$ B) $\frac{N\sqrt{\pi M}}{2}$ C) $\frac{M\sqrt{\pi N}}{2}$
D) $\frac{\pi\sqrt{M}}{2}$ E) $\frac{\pi\sqrt{MN}}{2}$

8 Calcula el área lateral del cilindro de revolución mostrado, si OA = 14 cm y BM = 6 cm.

A) 84π cm^2 B) 112π cm^2 C) 126π cm^2
D) 160π cm^2 E) 168π cm^2

9 Se tiene un cilindro oblicuo, donde el área de su sección recta es 36π m^2 y su generatriz mide 8 m. Calcula el área de la superficie lateral.

A) 90π m^2 B) 96π m^2 C) 80π m^2
D) 100π m^2 E) 108π m^2

10 La longitud del segmento que une los centros de las bases de un cilindro circular recto es igual a la longitud de la diagonal de un hexaedro regular. Si la razón entre los volúmenes del cilindro y el hexaedro es k, calcula la razón entre el área de la base del cilindro y el área de la superficie hexaédrica.

A) $\frac{k}{2}$ B) $\frac{k\sqrt{3}}{18}$ C) $\frac{k\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{k\sqrt{2}}{12}$ E) $\frac{k\sqrt{3}}{9}$

11 Un cilindro está lleno de agua hasta la mitad. Se suelta un trozo de metal y el nivel del agua sube en 4 cm. Si el diámetro del cilindro es 10 cm, ¿cuál es el volumen del trozo de metal?

A) 180 cm^3 B) 170,13 cm^3 C) 160 cm^3
D) 314 cm^3 E) 200 cm^3

12 Calcula el volumen de un cilindro recto inscrito en un prisma cuadrangular regular de 10 m de alto, si la diagonal de la base mide $12\sqrt{2}$ m.

A) 150π m^3 B) 300π m^3 C) 120π m^3
D) 180π m^3 E) 360π m^3

13 Calcula el volumen de un cilindro recto, si el desarrollo de la superficie lateral tiene un área de 180π m^2 y la distancia entre los centros de las bases de dicho cilindro mide 15 m.

A) 380π m^3 B) 440π m^3 C) 480π m^3
D) 540π m^3 E) 560π m^3

14 En un cilindro de revolución la generatriz y el diámetro son de igual longitud. Si el área de su superficie lateral es 64π m^2, calcula el volumen del cilindro.

A) 128π m^3 B) 160π m^3 C) 192π m^3
D) 216π m^3 E) 156π m^3

Claves

1. C	3. B	5. A	7. B	9. B	11. D	13. D
2. A	4. E	6. A	8. E	10. B	12. E	14. A

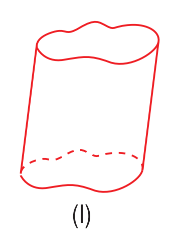


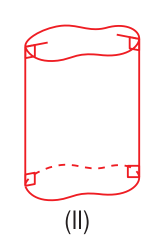
Practiquemos

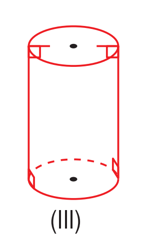
NIVEL 1

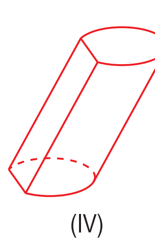
Comunicación matemática

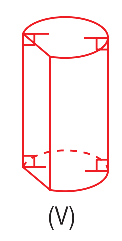
1. De las figuras:

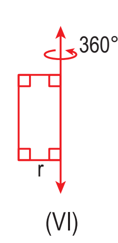

(I)


(II)

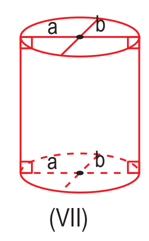

(III)


(IV)

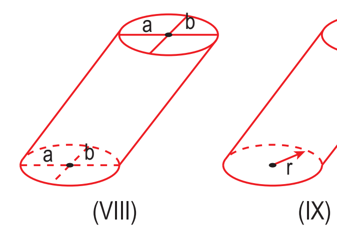

(V)



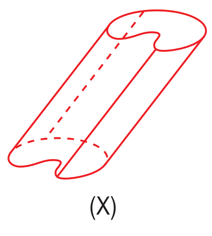
(VI)



(VII)



(VIII) (IX)


(X)

A) ¿Cuáles sólidos son convexos?

____

B) ¿Cuáles sólidos son no convexos?

____

C) ¿Cuáles sólidos no son cilindros?

____

2. De las figuras:

A) ¿Cuáles son cilindros rectos?

____

B) ¿Cuáles son cilindros con base circular?

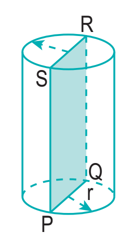
____

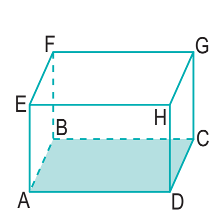
C) ¿Cuáles son cilindros con base elíptica?

____

Razonamiento y demostración

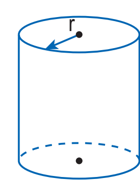
3. En la figura se muestra un cilindro recto y un paralelepípedo rectangular los cuales son equivalentes. Si PSRQ es congruente con ABCD, calcula $\frac{BF}{r}$.





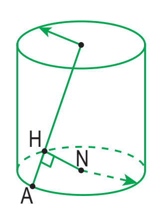
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3}{\pi}$ E) π

4. De la figura, calcula r si el volumen es numéricamente igual al área lateral.



A) 2
B) 8
C) 3
D) 4
E) 5

5. Según el gráfico, se tiene un cilindro de revolución. Si se cumple $(AM)(NH) = 12\ m^2$, calcula el área de la superficie lateral del cilindro.



A) $12\pi\ m^2$
B) $24\pi\ m^2$
C) $28\pi\ m^2$
D) $18\pi\ m^2$
E) $30\pi\ m^2$

Resolución de problemas

6. El área lateral de un cilindro recto de revolución es $25\ m^2$ y su altura con el diámetro de la base son congruentes. Halla la medida de su altura.

A) $\frac{5}{2\sqrt{\pi}}$ m B) $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ m C) $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ m
D) $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ m E) $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ m

7. Calcula el volumen de un cilindro recto circunscrito a un cubo cuya diagonal mide $6\sqrt{3}$ m.

A) $24\pi\ m^3$ B) $36\pi\ m^3$ C) $54\pi\ m^3$
D) $72\pi\ m^3$ E) $108\pi\ m^3$

8. Si $\overline{AB}$ 8 medio de $\overline{BC}$. Siendo E un punto de $\overline{CD}$, tal que $\overline{OE} \perp \overline{AE}$, CE = 8 cm y ED = 9 cm. Halla el área total del

A) $260\pi\ cm^2$ B) $270\pi\ cm^2$ C) $275\pi\ cm^2$
D) $276\pi\ cm^2$ E) $280\pi\ cm^2$

9. Calcula el área total de un cilindro recto circunscrito a una esfera de 12 m de radio.

A) 900π m^2 B) 864π m^2 C) 800π m^2
D) 784π m^2 E) 748π m^2

10. Calcula el área lateral de un cilindro de revolución, sabiendo que una sección perpendicular a la base tiene área 2 m^2 y determina en ellas arcos de medida igual a 90°.

A) 2π m^2 B) π m^2 C) $\pi\sqrt{2}$ m^2
D) $2\pi\sqrt{2}$ m^2 E) 2π m^2

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Cuántas proposiciones son verdaderas:

I. La generatriz del cilindro es curva. ( )
II. La directriz del cilindro tiene líneas rectas. ( )
III. El cilindro tiene como mínimo 4 vértices. ( )
IV. Un cilindro siempre está inscrito en un prisma. ( )

A) 3 B) 1 C) 4 D) 2 E) 0

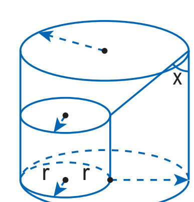
12. Cuántas proposiciones son falsas:

I. Un cilindro tiene el área de sus bases diferentes. ( )
II. Un cilindro oblicuo tiene sección axial. ( )
III. Un cilindro recto puede estar inscrito en un cilindro oblicuo, de bases iguales. ( )
IV. Un cilindro recto es un sólido convexo. ( )

A) 1 B) 3 C) 4 D) 2 E) 0

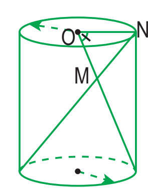
Razonamiento y demostración

13. En la figura se tiene dos cilindros de revolución. Si al área de la superficie lateral del mayor cilindro es el doble del área de la superficie total del menor, calcula x.



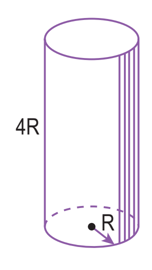
A) 53°
B) 60°
C) 63°30'
D) 71°30'
E) 75°

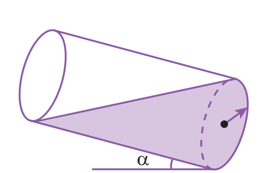
14. Según el gráfico, se tiene un cilindro de revolución. Si el área de la región triangular OMN es 3 m^2, calcula el área de la superficie lateral del cilindro.



A) 48π m^2
B) 30π m^2
C) 38π m^2
D) 36π m^2
E) 18π m^2

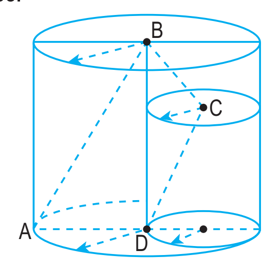
15. La figura muestra a un cilindro de revolución lleno de agua. Se le inclina hasta derramar la mitad de su contenido. Calcula α.





A) 26,5° B) 18,5° C) 30° D) 45° E) 36°

16. En el gráfico se muestran dos cilindros de revolución, si ABCD es un trapecio isósceles ($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$). Calcula la razón de volúmenes de dichos cilindros.



A) 2 B) 4 C) 8 D) 12 E) 16

Resolución de problemas

17. Halla el área total de un cilindro de revolución en el cual la diagonal axial mide 17 cm y la distancia de un punto de la circunferencia de una base, al centro de la otra es $\sqrt{241}$ cm.

A) 170π cm^2 B) 150π cm^2 C) 152π cm^2
D) 180π cm^2 E) 140π cm^2

18. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro oblicuo de bases elípticas, es un rombo de diagonales 12 cm y 16 cm, respectivamente. Halla el volumen del sólido.

A) $\frac{1152}{5\pi}$ cm^3 B) $\frac{1100}{3\pi}$ cm^3 C) $\frac{1112}{5\pi}$ cm^3
D) $\frac{1125}{4\pi}$ cm^3 E) $\frac{144}{5\pi}$ cm^3

19. Calcula el radio de la base de un tronco de cilindro circular recto cuyas bases forman un ángulo diedro cuya medida es 60°; además, la suma de las áreas de las bases es S y la generatriz mínima mide cero.

A) $\frac{S}{\pi}$ B) $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$ C) $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3\pi}}$ D) $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{5}}$ E) $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

20. El radio de la sección recta de un cilindro oblicuo mide $2\sqrt{3}$, la generatriz está inclinada 60° respecto a la base y la altura es el doble del diámetro de la sección recta. Calcula el volumen del cilindro.

A) 180π B) 192π C) 200π D) 177π E) 195π

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Si dos troncos de cilindro tienen bases iguales, son congruentes. ( )

II. Si dos troncos de cilindro tienen alturas iguales, son semejantes. ( )

III. Si dos cilindros rectos tienen igual altura y bases iguales, son congruentes. ( )

IV. Un cilindro tiene superficie poligonal. ( )

A) VFF B) FFVV C) FFVF
D) VFVF E) FVFV

22. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

I. Dos cilindros semejantes deben de tener áreas laterales iguales. ( )

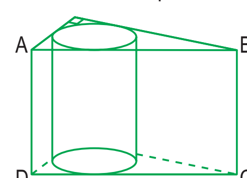
II. Dos troncos de cilindro semejantes poseen altura y área de la base proporcionales. ( )

III. Un tronco de cilindro oblicuo puede inscribirse en un tronco de cilindro recto. ( )

IV. Dos troncos de cilindros congruentes poseen volúmenes iguales. ( )

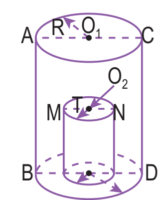
Razonamiento y demostración

23. En el gráfico, el área de la superficie lateral del prisma recto mostrado menos el doble del área de la cara ABCD es 8. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro.



A) 8π
B) 4π
C) 6π
D) 16π
E) 12π

24. En la figura se muestran dos cilindros de revolución, donde $R = 2r$ y $3(AB) = 5(O_1O_2)$, $AM = 5$ y $ND = 4$. Calcula el volumen del cilindro de radio r.

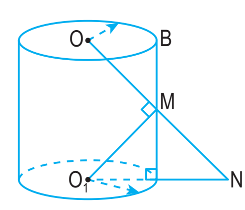


A) $\frac{132}{25}\pi\sqrt{5}$ B) $\frac{124}{13}\pi\sqrt{5}$

C) 33π D) $\frac{264}{25}\pi\sqrt{5}$

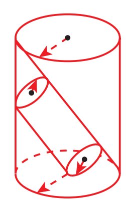
E) $13\sqrt{3}\,\pi$

25. Si $BM = 2$ m y $3(OM) = 2(MN)$, calcula el volumen del cilindro de revolución mostrado.



A) $\sqrt{5}\,\pi$ m^3
B) $\sqrt{56}\,\pi$ m^3
C) 9π m^3
D) 36π m^3
E) 30π m^3

26. En el gráfico la sección axial del cilindro recto mayor es una región cuadrada. Calcula la razón entre las áreas de las superficies laterales cilíndricas.

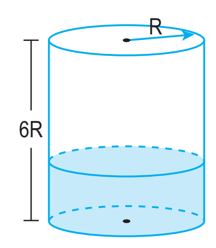


A) $\frac{6}{13}$ B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{7}{15}$

E) $\frac{3}{7}$

27. Se tiene un recipiente cilíndrico conteniendo agua hasta sus dos terceras partes. Determina el ángulo que debe inclinarse el recipiente para que el agua empiece a caer.



A) 37°
B) 53°/2
C) 37°/2
D) 53°
E) 16°

Resolución de problemas

28. ABCD, es un rectángulo. Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$. Si V_1 y V_2 son los volúmenes de los sólidos obtenidos al girar la región rectangular ABCD, alrededor de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

Halla $\frac{V_1}{V_2}$, si: $\frac{AH}{HC} = \frac{4}{25}$

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

29. En un prisma recto ABC-A'B'C' se inscribe un cilindro circunscrito a una esfera, si $AB = 13$; $BC = 15$ y $AC = 14$. Calcula el volumen del prisma.

A) 438 B) 546 C) 672 D) 736 E) 824

30. Dos cilindros circulares rectos son semejantes y de áreas totales de 18π cm^2 y 50π cm^2. ¿En qué relación están sus volúmenes?

A) $\frac{27}{125}$ B) $\frac{9}{29}$ C) $\frac{17}{21}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{21}{25}$

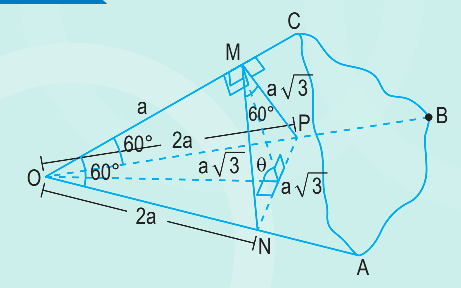
Claves

NIVEL 1	7. E	13. C	20. B	26. C
1.	8. D	14. D	NIVEL 3	27. B
2.	9. B	15. A	21. C	28. A
3. A	10. D	16. C	22.	29. C
4. A	NIVEL 2	17. C	23. A	30. A
5. B	11. B	18. A	24. D	
6. C	12. D	19. C	25. E	

MARATÓN Matemática

Tres rayos no coplanares $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OC}$ son tales que: $m\angle AOC = m\angle BOC = 60°$. Un plano perpendicular a $\overleftrightarrow{OC}$ determina los puntos M, N y P al intersecarse con $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OA}$. Sí $m\angle MNP = 60°$, entonces la medida del ángulo diedro O-$\overline{NP}$-M es:

Resolución:

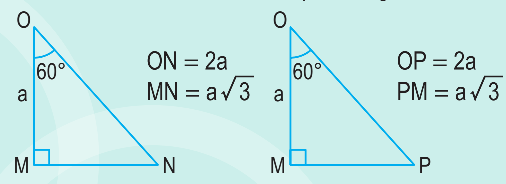


Paso 1. De los datos:

- Del triedro O-ABC: $m\angle AOC = m\angle BOC = 60°$
- Plano PMN $\perp$ $\overleftrightarrow{OC}$

Paso 2. Del triedro y el plano PMN:

- El $\triangle OMN \cong \triangle OMP$, si OM = a $\Rightarrow$ por triángulos notables:

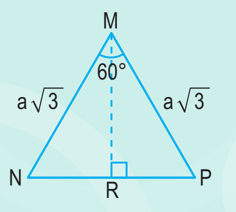


Paso 3. Del $\triangle NMP$:

- Es un $\triangle$ equilátero

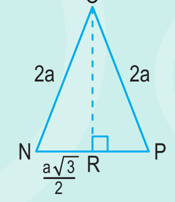
$\Rightarrow$ NP = $a\sqrt{3}$ y $\overline{MR}$ es la altura de $\triangle NMP$.

$\Rightarrow$ MR = $\dfrac{3}{2}a$



Paso 4. Del $\triangle OPN$ (isósceles):

- $\overline{OR}$: es la altura, por Pitágoras OR = $\dfrac{\sqrt{13}}{2}a$

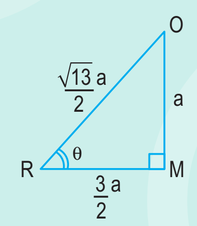


Paso 5: Del $\triangle OMR$:

Por dato $\overline{OM} \perp \square MNP$ $\Rightarrow$ $\overline{OM} \perp \overline{MR}$

y θ = ángulo diedro O-NP-M

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{a}{\frac{3}{2}a} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)$



1. Para alfombrar el piso rectangular de un *stand* ferial (como se muestra en la figura) se necesitaron 9800 m^2 de alfombra. ¿Cuántos metros de toldo se necesitará para cubrir el techo (superficie de un semicilindro), si el largo del *stand* es al ancho como 8 es a 1?

A) $2800\pi\ m^2$
B) $5880\pi\ m^2$
C) $7350\pi\ m^2$
D) $4900\pi\ m^2$
E) $5000\pi\ m^2$



2. Dos regiones rectangulares congruentes ABCD y ABC'D'. Forman un ángulo diedro cuya medida es 60°. Si AD = 2AB, calcula la medida del ángulo que forman las rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC'}$.

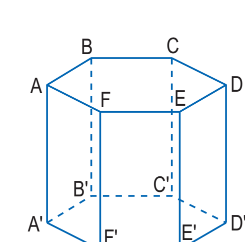
A) $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$ B) $\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)$ C) $\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$

D) $\arccos\left(\dfrac{1}{5}\right)$ C) $\arccos\left(\dfrac{1}{6}\right)$

3. Un cilindro circular recto de altura $15\sqrt{2}$ y radio $\sqrt{6}$ es cortado por 2 planos paralelos que forman un ángulo de 30° con el eje del cilindro; cada uno de los planos corta a solo una de las bases en un único punto. El área lateral de la parte del cilindro comprendido entre estos dos planos es:

A) $18\sqrt{3}\ \pi$ B) $15\sqrt{3}\ \pi$ C) $20\sqrt{3}\ \pi$
D) $25\sqrt{3}\ \pi$ E) $36\sqrt{3}\ \pi$

4. En un prisma hexagonal regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F' la longitud de la diagonal mayor del prisma es **d** y la medida del ángulo A'DF' es α. Halla el volumen del prisma.



A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}d^3\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2\alpha}\ \operatorname{sen}^2\alpha$

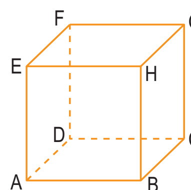
B) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,d^2\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2\alpha}\ \operatorname{sen}^2\alpha$

C) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,d^3\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2\alpha}\ \operatorname{sen}^2\alpha$

D) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,d^3\sqrt{1-4\operatorname{sen}\alpha}\ \operatorname{sen}^2\alpha$

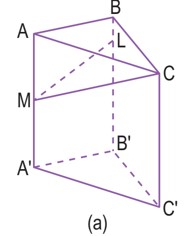
E) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,d^2\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2\alpha}\ \operatorname{sen}^2\alpha$

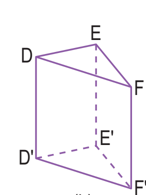
5. El coseno del ángulo diedro que forma la base del cubo con el plano que contiene a los puntos medios de las aristas $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es:



A) $\dfrac{3}{\sqrt{41}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
C) 1/2 D) 2/3
E) 3/4

6. En la gráfica (a y b) se muestran dos prismas rectos, si la gráfica (b), es equivalente al tronco de prisma mayor de la gráfica (a); AM = MA' = 3 y la razón de volúmenes de los sólidos ABCML y MLC - A'B'C' es 1/3. Halla EE', si la sección recta de la gráfica (a) es el doble de la gráfica (b).





A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5


Geometría
Geometría
Geometría
Unidad 4
Geometría

RECUERDA

Geometría analítica

Bajo esta denominación se considera aquella parte de la Geometría donde se estudian las figuras y transformaciones geométricas dadas por ecuaciones algebraicas. Las puertas a esta rama fueron abiertas ya en el siglo XVII por Descartes y Fermat, pero solo incluían problemas planos. Hubo de ser Newton quien en 1704 diera un paso importante al publicar la obra, *Enumeración de las curvas de tercer orden*, clasificando las curvas según el número posible de puntos de intersección con una recta, obteniendo un total de 72 tipos de curvas, que se podían representar por ecuaciones de cuatro tipos.

Sin embargo, lo verdaderamente importante de esta obra fue el descubrimiento de las nuevas posibilidades del método de coordenadas, definiendo los signos de las funciones en los cuatro cuadrantes. Con posterioridad a Newton, las curvas de tercer orden fueron estudiadas por Stirling, Maclaurin, Nicolle, Maupertius, Braikenridge, Steiner, Salmon, Silvestre, Shall, Clebsch y otros. Fue Euler quien, en 1748, sistematizó la geometría analítica de una manera formal. En primer lugar expuso el sistema de la geometría analítica en el plano, introduciendo además de las coordenadas rectangulares en el espacio, las oblicuas y polares. En segundo lugar, estudió las transformaciones de los sistemas de coordenadas. También clasificó las curvas según el grado de sus ecuaciones, estudiando sus propiedades generales.

En otros apartados de sus obras trató las secciones cónicas, las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado, las ramas infinitas y asintóticas de las secciones cónicas, y clasificó las curvas de tercer y cuarto orden, demostrando la inexactitud de la clasificación newtoniana. También estudió las tangentes, problemas de curvaturas, diámetros y simetrías, semejanzas y propiedades afines, intersección de curvas, composición de ecuaciones de curvas complejas, curvas trascendentes, y la resolución general de ecuaciones trigonométricas. Todos estos aspectos se recogen en el segundo tomo de la obra *Introducción al análisis* que Euler dedicó exclusivamente a la geometría analítica. En la segunda mitad del siglo se introdujeron solo mejoras parciales, pues en lo fundamental, la geometría analítica ya estaba formada. Destacaremos entre otros los nombres de G. Monge, Lacroix y Menier.

Reflexiona

- *La confianza de sí mismo, es la clave de todo logro; refuerza la habilidad, duplica la energía, expande la capacidad mental y aumenta la fuerza personal.*
- *El éxito ha sido y será siempre, el resultado natural de lo que una persona es y no de lo que finje ser. ¡Haz todo espontáneamente y el mundo notará la luz que irradias!*
- *Siempre procura comprender a tu interlocutor, esta es la clave de que logres su absoluta confianza. ¡No vayas por la vida pretendiendo tener siempre la razón!*

¡Razona...!

¿Qué número continúa?

10; 30; 70; 190; 670; ...

A) 900 B) 425 C) 1000
D) 2400 E) 3070

Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: PIRÁMIDE

1 El volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular es 74 m^3. Si su altura mide 6 m y el área de una de las bases mide 16 m^2, ¿cuánto mide el área de la otra base?

A) 10 m^2 B) 9,5 m^2 C) 8,8 m^2
D) 9 m^2 E) 8 m^2

2 ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular regular si su arista básica mide $\sqrt{66}$ m y su arista lateral mide 7m?

A) 50 m^3 B) 45 m^3 C) 48,5 m^3
D) 49 m^3 E) 49,5 m^3

3 Calcula el área lateral de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el lado de la base mide 6 m y que el apotema de la pirámide forma con el plano de la base un ángulo cuya medida es 60°.

A) $110\sqrt[3]{3}$ m^3 B) $108\sqrt{3}$ m^3 C) $100\sqrt{3}$ m^3
D) $108\sqrt{2}$ m^3 E) $105\sqrt{3}$ m^3

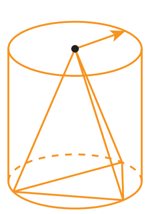
4 El área de la superficie lateral de una pirámide cuadrangular regular es 6300 m^2 y la medida del ángulo diedro formado por una cara lateral y la base es 74°. Calcula la distancia del centro de gravedad de la base a una cara lateral de la pirámide.

A) 20,16 m B) 20 m C) 22 m
D) 20,15 m E) 21 m

5 La base de una pirámide regular es un hexágono de perímetro 36 cm. Si cada arista lateral mide 10 cm, calcula su volumen (en cm^3).

A) 144 B) $144\sqrt{2}$ C) $144\sqrt{3}$
D) $144\sqrt{6}$ E) 72

6 Calcula la relación entre los volúmenes de la pirámide regular y el cilindro de revolución mostrados.



A) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3\pi}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

7 Si tiene una pirámide V-ABCD tal que ABCD es un paralelogramo cuyas diagonales miden AC = 10 y BD = 8. Calcula el valor de:

$H = (VA)^2 + (VC)^2 - (VB)^2 - (VD)^2$

A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 28

8 La altura y una arista lateral de una pirámide regular cuadrangular miden 12 m y 13 m, respectivamente. Calcula el volumen.

A) 200 m^3 B) 300 m^3 C) 150 m^3
D) 240 m^3 E) 250 m^3

9 Calcula el área de la superficie lateral de una pirámide triangular regular, cuya arista lateral y de la base miden 25 m y 14 m, respectivamente.

A) 308 m^2 B) 416 m^2 C) 576 m^2
D) 504 m^2 E) 252 m^2

10 La arista lateral y de la base de una pirámide regular triangular miden 5 m y $3\sqrt{3}$ m, respectivamente. Calcula su volumen.

A) $18\sqrt{3}$ m^3 B) $15\sqrt{6}$ m^3 C) $9\sqrt{2}$ m^3
D) $27\sqrt{3}$ m^3 E) $9\sqrt{3}$ m^3

11 Se tiene una pirámide O-ABC, tal que ABC y OCB son triángulos equiláteros. Calcula su volumen, si AO = 6 m y AB = $4\sqrt{3}$ m.

A) 24 m^3 B) 28 m^3 C) 32 m^3
D) 36 m^3 E) 48 m^3

12 Calcula la distancia del vértice de una pirámide cuadrangular a un plano paralelo a su base el cual la divide en 2 sólidos equivalentes. La altura de la pirámide es 8.

A) $2\sqrt[3]{4}$ B) $5\sqrt[3]{4}$ C) $3\sqrt[3]{4}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt[3]{4}$

13 Calcula el volumen de un tronco de pirámide ABC-DEF, si el perímetro de la base superior mide 24 m y su inradio 1 m; y el perímetro de la base inferior mide 36 m y su inradio mide 6 m, además la altura del tronco mide 9 m.

A) 460 m^3 B) 468 m^3 C) 470 m^3
D) 475 m^3 E) 480 m^3

14 Dada una pirámide cuya altura mide h unidades. ¿A qué distancia del vértice se debe trazar un plano paralelo a la base para que los sólidos determinados sean equivalentes?

A) $\frac{h}{4}$ B) $\frac{h}{3}$ C) $\frac{h}{2}$
D) $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ E) h

Claves

1. D	3. B	5. C	7. B	9. D	11. D	13. B
2. E	4. A	6. E	8. A	10. E	12. E	14. D

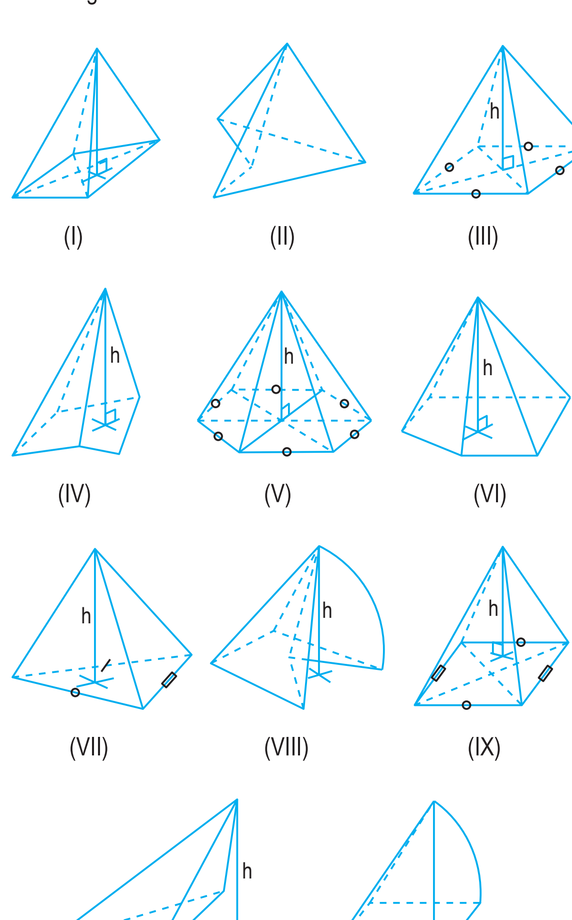


Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. De las figuras:



A) ¿Qué pirámides son convexas?

____

B) ¿Qué pirámides son no convexas?

____

C) ¿Qué pirámides tienen base cuadrangular?

____

2. De la figura:

A) ¿Qué pirámides son regulares?

____

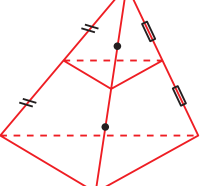
B) ¿Cuáles son pirámides irregulares convexas?

____

Razonamiento y demostración

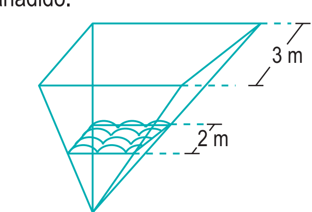
3. De la figura mostrada, halla la razón entre los volúmenes del tronco de pirámide y la pirámide menor.

A) 8
B) 6
C) 7
D) 9
E) 5



4. El siguiente recipiente de base cuadrangular contiene 16 m^3 de agua. Luego se vierte al recipiente una cierta cantidad de agua, de tal forma que el recipiente quede totalmente lleno. Calcula el volumen de agua añadido.

A) 36 m^3
B) 38 m^3
C) 40 m^3
D) 52 m^3
E) 73 m^3



Resolución de problemas

5. Se tiene una pirámide regular cuadrangular cuya área de su superficie lateral es 64 y su apotema mide el doble de su arista básica. ¿Cuánto mide su arista básica?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. Calcula a qué distancia del vértice de una pirámide triangular, cuya altura es 3, se debe trazar un plano paralelo a la base para que las dos partes resultantes estén en la razón de 8/19.

A) 1,6 B) 5/2 C) 3/2 D) 3 E) 2

7. Calcula el volumen de una pirámide que tiene por base una de las caras de un cubo cuya arista mide 3 y el vértice se encuentra en una de las diagonales del cubo.

A) 1,5 B) 2 C) 3 D) 4,5 E) 5

8. Se tiene una pirámide hexagonal regular V-ABCDEF, en la cual AB = 6 cm, BV = 12 cm. Calcula el volumen del sólido V-BCDE.

A) 250 cm^3 B) 312 cm^3 C) 400 cm^3
D) 162 cm^3 E) 200 cm^3

9. Se tiene una pirámide regular cuadrangular cuya arista lateral forma con la base un ángulo que mide 37° y el volumen es 32. ¿Cuánto mide la altura de la pirámide?

A) 4 B) 2 C) 1 D) 3 E) 5

10. Se tiene una pirámide regular cuadrangular cuya altura mide 6 y el radio de la semiesfera inscrita con su círculo máximo sobre la base de la pirámide mide 2. Calcula el volumen de la pirámide.

A) 42 B) 18 C) 32 D) 48 E) 24

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

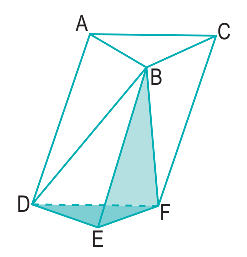
I. Dos pirámides semejantes tienen bases iguales. ( )
II. Dos pirámides semejantes pueden tener alturas iguales. ( )
III. Dos pirámides semejantes pueden ser iguales. ( )
IV. Dos pirámides semejantes tienen sus respectivos. troncos de pirámides semejantes. ( )

12. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

I. Dos pirámides congruentes poseen bases diferentes. ( )
II. Dos pirámides congruentes tienen la misma área lateral. ( )
III. Dos pirámides congruentes tienen sus respectivos troncos de pirámides congruentes. ( )
IV. Los troncos de dos pirámides congruentes serían congruentes si tuvieran la misma altura. ( )

Razonamiento y demostración

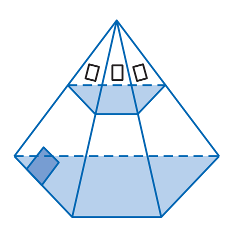
13. En la figura mostrada, ABCDEF es un prisma oblicuo.



Si el volumen de la pirámide B - DEF es 10 m^3.
Halla el volumen de la pirámide B - ACFD.

A) 25 m^3 B) 10 m^3 C) 15 m^3 D) 20 m^3 E) 24 m^3

14. Un ingeniero fanático de las pirámides construye su casa como se muestra en la figura. Si el piso de la segunda planta tiene un área de 27 m^2, y el de la planta baja 48 m^2. Además el segundo piso tiene una altura de 6 m. Calcula la altura del primer piso.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución de problemas

15. La base de una pirámide regular es un triángulo equilátero inscrito en un círculo de 2 cm de radio, el área de la superficie lateral de esta pirámide es igual al doble del área de la superficie de la base. Calcula el volumen de la pirámide.

A) 4,5 cm^3 B) 3,5 cm^3 C) 2 cm^3 D) 4 cm^3 E) 3 cm^3

16. En una pirámide cuadrangular regular, una arista lateral forma un ángulo de 37° con el plano de la base. Calcula el valor del ángulo diedro que forma una cara lateral con la base.

A) $\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\arctan\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}$
D) $\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\arctan\frac{3\sqrt{2}}{8}$

17. Halla el área lateral de una pirámide regular de base triangular, si el radio de la circunferencia inscrita en la base mide 2 y la altura mide $4\sqrt{2}$.

A) 36 B) $36\sqrt{3}$ C) $16\sqrt{3}$
D) $32\sqrt{3}$ E) $18\sqrt{3}$

18. Se tiene una pirámide cuadrangular regular cuya altura es 3 m. Calcula su área lateral si su base tiene un área de 16 m^2.

A) 48 m^2 B) $10\sqrt{3}$ m^2 C) $8\sqrt{13}$ m^2
D) $6\sqrt{2}$ m^2 E) $16\sqrt{3}$ m^2

19. Se tiene una pirámide regular cuadrangular cuyas caras laterales forman con la base un ángulo que mide 53° y el área de la superficie lateral es 60. ¿Cuánto mide la altura?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. En un cubo de lado 2, el cruce de las cuatro diagonales determinan seis pirámides. Halla el volumen de una de dichas pirámides.

A) 4/3 B) 2/3 C) 1/2 D) 1/4 E) 3/2

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

I. Una pirámide regular está inscrito en un cono. ( )
II. Una pirámide irregular está inscrita en un cono. ( )
III. Una pirámide tiene como mínimo 5 vértices. ( )
IV. En una pirámide la proyección de la altura sobre el plano de la base siempre se proyecta en la base. ( )

22. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

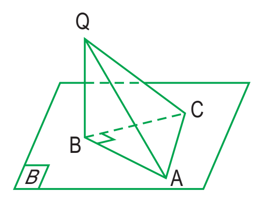
I. Si la pirámide es no convexa su base es convexa. ( )
II. Si la pirámide es convexa, su base es convexa. ( )
III. Una pirámide no convexa es una pirámide irregular. ( )
IV. Una pirámide convexa solo es una pirámide regular. ( )

23. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

I. Si dos troncos de pirámide son semejantes, las pirámides son semejantes. ( )
II. Si dos troncos de pirámide son congruentes, las pirámides son congruentes. ( )
III. Si en dos troncos de pirámides sus bases son iguales son troncos de pirámides congruentes. ( )
IV. Si dos troncos de pirámides poseen volúmenes diferentes, son troncos de pirámides congruentes. ( )

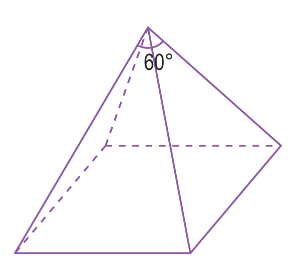
Razonamiento y demostración

24. Calcula el volumen de la pirámide Q-ABC, sabiendo que: QC = 15 m, QA = 13 m y AC = $\sqrt{106}$ m, además, $\overline{QB}$ es perpendicular al plano P.



A) 80 m^3 B) 60 m^3 C) 50 m^3
D) 100 m^3 E) 90 m^3

25. En la figura se muestra una pirámide regular de base cuadrangular de volumen $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. ¿Cuánto mide su arista lateral?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4
D) 2 E) 3

Resolución de problemas

26. Se tiene un hexaedro regular ABCD-EFGH. Se traza $\overline{DS} \perp \overline{AG}$ (S $\in$ $\overline{AG}$). Calcula el volumen de la pirámide S-ABCD, si DS = 2 m.

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m^3 B) $\frac{6\sqrt{2}}{3}$ m^3 C) $\frac{2\sqrt{3}}{6}$ m^3

D) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ m^3 E) $\frac{3\sqrt{2}}{6}$ m^3

27. En una pirámide cuadrangular regular se cumple que $5A_{SB} = 3A_{SL}$.
Siendo:
A_{SB}: área de la base.
A_{SL}: área de la superficie lateral.

Calcula la medida del ángulo entre dos caras laterales opuestas.

A) 80° B) 60° C) 53°
D) 106° E) 74°

28. Se tiene una pirámide cuadrangular regular P-ABCD; el área de la región ABCD es el doble del área de la región PCD. Si la altura de la pirámide mide 6 m, calcula el volumen de la pirámide.

A) 94 m^3 B) 92 m^3 C) 96 m^3
D) 95 m^3 E) 99 m^3

29. Se tiene un tetraedro regular ABCD cuya arista mide a unidades; en la arista AD se ubica el punto O, si la altura de la pirámide ABCO es congruente al segmento OD, la longitud del segmento OD, es:

A) $(\sqrt{6}-2)a$ B) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{a}{2}$

D) $a\sqrt{3}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

30. En una pirámide triangular regular, la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo de la base mide 22 m y la longitud del radio de la circunferencia inscrita a una cara lateral mide 11 m; calcula el área de la superficie lateral de la pirámide.

A) $1524\sqrt{3}$ m^2 B) $1564\sqrt{3}$ m^2 C) $1584\sqrt{3}$ m^2
D) $1624\sqrt{3}$ m^2 E) $1684\sqrt{3}$ m^2

31. Se tiene una pirámide regular cuadrangular cuya área de la superficie lateral es 300 y el centro de su base dista de una de sus caras 6. Calcula el volumen de dicha pirámide.

A) 300 B) 600 C) 400
D) 500 E) 700



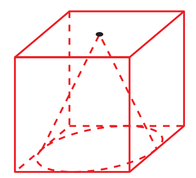
Aplicamos lo aprendido





TEMA 2: CONO

1 Calcula el volumen del cono mostrado sabiendo que la diagonal del hexaedro mide $\sqrt{3}$ m.



A) $\frac{\pi}{6}$ m^3 B) $\frac{\pi}{4}$ m^3 C) $\frac{\pi}{3}$ m^3
D) $\frac{\pi}{12}$ m^3 E) $\frac{2\pi}{3}$ m^3

2 Halla el volumen de un cono de revolución en el cual el área lateral es tres veces el área de la base y la altura mide 4 cm.

A) $\frac{8}{3\pi}$ cm^3 B) $\frac{8\pi}{3}$ cm^3 C) $\frac{4\pi}{3}$ cm^3
D) $\frac{4}{3\pi}$ cm^3 E) $\frac{2}{3\pi}$ cm^3

3 Halla el volumen del cuerpo generado al rotar un triángulo equilátero 360° alrededor de uno de sus lados que mide a.

A) $\frac{\pi a^3}{27}$ B) $\frac{\pi a^3}{4}$ C) $\frac{\pi a^3}{8}$
D) $\frac{\pi a^3}{2}$ E) $\frac{\pi a^3}{6}$

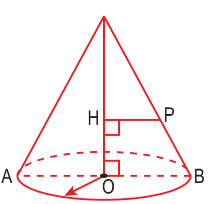
4 El desarrollo de la superficie lateral de un cono recto es un sector circular de 16 m de radio cuyo ángulo central mide 45°. Halla el volumen del cono.

A) $8\sqrt{7}\pi$ m^3 B) $6\sqrt{7}\pi$ m^3 C) $9\sqrt{7}\pi$ m^3
D) $5\sqrt{7}\pi$ m^3 E) $7\sqrt{8}\pi$ m^3

5 Calcula el volumen de un cono equilátero cuya generatriz mide $2\sqrt{3}$ m.

A) 3π m^3 B) π m^3 C) 5π m^3
D) 4π m^3 E) 2π m^3

6 En la figura OH = HP = 2 cm, AO = OB = 3 cm. Halla el área lateral del cono.



A) $9\sqrt{5}\pi$ cm^2 B) $6\sqrt{5}\pi$ cm^2 C) $4\sqrt{5}\pi$ cm^2
D) $8\sqrt{5}\pi$ cm^2 E) 6π cm^2

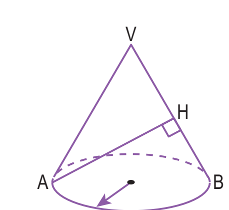
7 El área de la base de un cono circular recto mide 10 m^2. Halla el área de la sección paralela a la base trazada por el punto medio de la altura.

A) 3 m^2 B) 2,5 m^2 C) 2,3 m^2
D) 2,7 m^2 E) 3,2 m^2

8 Calcula el volumen de un cono de revolución cuya generatriz tiene una longitud igual a g y la medida del ángulo desigual de su sección axial es 2α.

A) $\dfrac{\pi g^3 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha}{3}$ B) $\dfrac{\pi g^3 \operatorname{sen}^2\alpha}{3}$
C) $\dfrac{\pi g^3 \cos\alpha}{3}$ D) $\dfrac{\pi g^3}{3}$
E) $\dfrac{2\pi g^3}{3}$

9 En el gráfico BH = 2 y VH =3, calcula el área de la superficie total del cono de revolución.

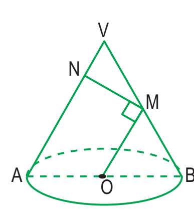


A) $2\pi(1+\sqrt{2})$ B) $3\pi(\sqrt{2}-1)$
C) $5\pi(\sqrt{5}+1)$ D) $4\pi(\sqrt{5}+1)$
E) $4\pi(\sqrt{5}-1)$

10 El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular cuyo ángulo central mide 120° y su área 3π cm^2. Calcula el volumen del cono.

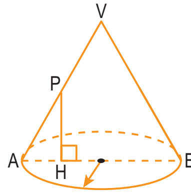
A) $\dfrac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}$ cm^3 B) $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{3}$ cm^3 C) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ cm^3
D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ cm^3 E) $\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$ cm^3

11 En la figura se tiene un cono de revolución, VM = MB, AN = 6 y MO = 4. Calcula el área de la superficie lateral.



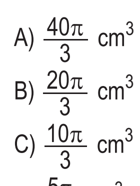
A) 36π B) 32π C) 64π
D) $12\sqrt{2}\,\pi$ E) $36\sqrt{3}\,\pi$

12 En el gráfico se tiene un cono de revolución, $PH = 2\sqrt{6}$, AH = 2, HB = 6. Calcula el volumen del cono.



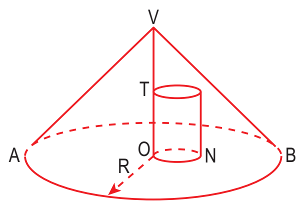
A) $\dfrac{128\pi}{3}\sqrt{3}$ B) $\dfrac{64\pi}{3}\sqrt{2}$ C) $\dfrac{32}{3}\sqrt{6}$
D) $\dfrac{64\pi}{3}\sqrt{6}$ E) $\dfrac{128\pi}{3}\sqrt{6}$

13 El gráfico ABC–A'B'C' es un prisma recto cuyo volumen es 240 cm^3 y BB' = A'C'. Calcula el volumen del cono circular recto cuyo vértice pertenece a la cara ABC.



A) $\dfrac{40\pi}{3}$ cm^3
B) $\dfrac{20\pi}{3}$ cm^3
C) $\dfrac{10\pi}{3}$ cm^3
D) $\dfrac{5\pi}{3}$ cm^3
E) $\dfrac{25\pi}{3}$ cm^3

14 La figura muestra un cono de revolución, tal que la m$\angle$AVB = 90°; la m$\angle$TNO = 53°, VT = TO y el volumen del cilindro es 72π. Calcula el área de la superficie lateral del cono.



A) $256\sqrt{2}\,\pi$ B) $49\sqrt{2}\,\pi$ C) $98\sqrt{2}\,\pi$
D) $100\sqrt{2}\,\pi$ E) $108\sqrt{2}\,\pi$

Claves

1. D	3. B	5. A	7. B	9. C	11. B	13. A
2. B	4. A	6. A	8. A	10. A	12. D	14. A

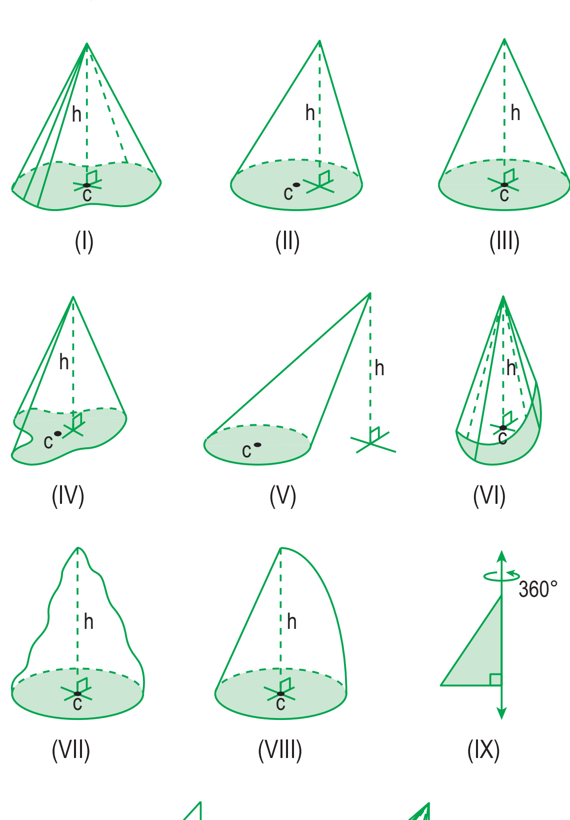
Practiquemos

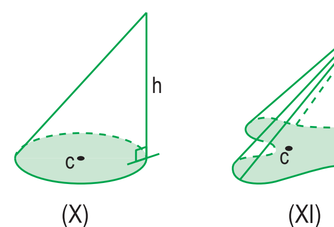


NIVEL 1

Comunicación matemática

1. De las figuras:





A) ¿Qué sólidos son convexos?

____

B) ¿Qué sólidos son no convexos?

____

C) ¿Qué sólidos no son conos?

____

2. De las figuras:

A) ¿Cuáles son conos rectos?

____

B) ¿Cuáles son conos oblicuos?

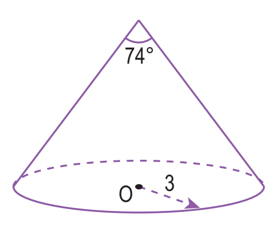
____

C) ¿Cuáles son conos de revolución?

____

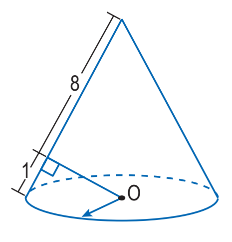
Razonamiento y demostración

3. Calcula el volumen del cono recto mostrado.



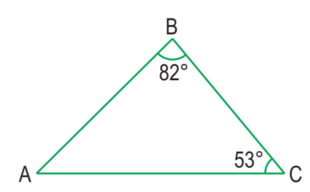
A) 8π B) 6π C) 10π
D) 14π E) 12π

4. Calcula el área lateral del cono recto mostrado.



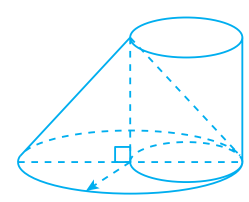
A) 9π B) 12π C) 27π
D) 32π E) 16π

5. En la figura BC = 5/4 m, halla el volumen del sólido que se obtiene al girar la región triangular ABC, 360° alrededor de $\overline{AC}$.



A) $5\pi/3$ m^3 B) $5\pi/12$ m^3 C) $7\pi/12$ m^3
D) $6\pi/5$ m^3 E) $7\pi/6$ m^3

6. En el gráfico, calcula el volumen del cono de revolución, si el volumen del cilindro es 30 cm^3.



A) 45 cm^3 B) 80 cm^3 C) 40 cm^3
D) 40,5 cm^3 E) 50 cm^3

Resolución de problemas

7. En un cono de revolución las medidas de la altura y la generatriz están en relación de 4 a 5. Halla el área de la base si el área total del cono mide 216π cm^2.

A) 81π cm^2 B) $72\sqrt{2}\pi$ cm^2 C) $56\sqrt{3}\pi$ cm^2
D) $54\sqrt{3}\pi$ cm^2 E) 96π cm^2

8. La generatriz de un cono circular recto forma con su base un ángulo de 53°. Halla el área total del cono, si su altura mide $\sqrt{\frac{2}{3}}$ m.

A) $\frac{4\pi}{3}$ m^2 B) $\frac{3\pi}{4}$ m^2 C) $\frac{5\pi}{4}$ m^2
D) π m^2 E) 2π m^2

9. Se tiene un sector circular de radio 3 m cuyo ángulo central mide $2\pi/3$ rad. Halla el área total del cono formado con este sector circular.

A) 4π m^2 B) 3π m^2 C) π m^2
D) $4{,}5\pi$ m^2 E) 2π m^2

10. Calcula el área lateral de un cono recto de revolución, sabiendo que el segmento mediatriz de una de sus generatrices limitada por la altura del cono mide 4 m, y la altura de este sólido mide 10 m.

A) 83π m^2 B) 50π m^2 C) 80π m^2
D) 38π m^2 E) 40π m^2

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

I. Dos conos semejantes pueden ser iguales. ( )
II. Dos conos semejantes tienen bases iguales. ( )
III. Dos conos semejantes pueden tener alturas iguales. ( )
IV. Dos conos semejantes tienen sus respectivos troncos de cono semejantes. ( )

A) FVVF B) VFVV C) VVFF D) VFVF E) FFVF

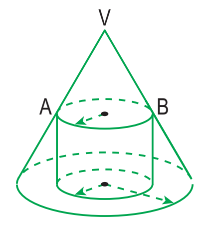
12. Indica qué proposiciones son verdaderas:

I. Dos conos congruentes poseen bases diferentes. ( )
II. Dos conos congruentes tienen la misma área total. ( )
III. Los troncos de dos conos congruentes serían congruentes si tuvieran la misma altura. ( )
IV. Dos conos congruentes tienen sus respectivos troncos de cono congruentes. ( )

A) Solo I B) Solo II C) I y III D) II y IV E) Solo IV

Razonamiento y demostración

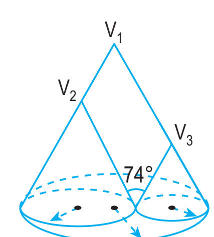
13. En el gráfico se muestra un cono circular recto y un cilindro de revolución que es equivalente al cono parcial, cuyo diámetro de su base es AB. Si la longitud de la altura del cono total es 4, calcula la longitud de la altura del cono parcial.



A) 2
B) 4
C) 3
D) 5
E) 1

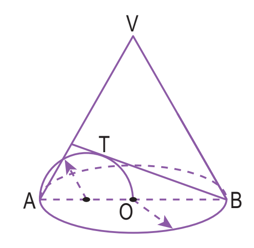
14. En el gráfico se tienen conos de revolución. Si $g_2 = 2(g_3)$, siendo g = generatriz de los respectivos conos. Calcula la siguiente relación:

$$\frac{\text{Volumen del cono 1}}{\text{Volumen del cono 2} + \text{Volumen del cono 3}}$$



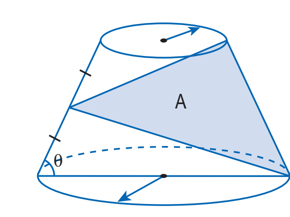
A) 2,5
B) 3
C) 4
D) 4,5
E) 5

15. Calcula el volumen del cono circular recto mostrado si VA = g, TB = a (T es punto de tangencia).



A) $\frac{\pi a^2}{6}g$ B) $\frac{\pi a^2}{3}g$ C) $\frac{\pi a^2}{3}\sqrt{g^2-\frac{a^2}{2}}$
D) $\frac{\pi a^2}{6}\sqrt{g^2-\frac{a^2}{2}}$ E) $\frac{\pi a^2}{3}(g+a)$

16. En la figura, se muestra un tronco de cono recto. Calcula el área lateral.



A) $\frac{5\pi A}{\operatorname{sen}\theta}$ B) $\frac{\pi A}{\operatorname{sen}\theta}$
C) $\frac{2\pi A}{\operatorname{sen}\theta}$ D) $\frac{3\pi A}{\operatorname{sen}\theta}$
E) $\frac{4\pi A}{\operatorname{sen}\theta}$

Resolución de problemas

17. La generatriz de un cono de revolución mide 5 cm. Halla el volumen si el desarrollo de su superficie lateral forma un sector circular de 216°.

A) 10π cm^3 B) 8π cm^3 C) 18π cm^3
D) 6π cm^3 E) 12π cm^3

18. Halla el volumen de un cono de revolución si una generatriz mide 10 y está inclinada 53° con respecto a la base.

A) 86π B) 40π C) 96π D) 60π E) 90π

19. En un cono de revolución, la mediatriz de una generatriz pasa por el centro de su base. Halla la razón entre el área de la base y el área lateral de dicho cono.

A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}/2$

20. El desarrollo de un tronco de cono es el área de un trapecio circular que tiene por radios 4 m y 10 m, además 180° de ángulo central. Calcula la altura del tronco de cono.

A) $\sqrt{3}$ m B) $2\sqrt{3}$ m C) $3\sqrt{3}$ m D) $\sqrt{2}$ m E) $3\sqrt{2}$ m

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

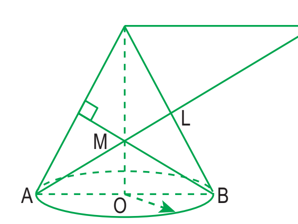
I. Un cono recto siempre está inscrito en un cono oblicuo. ( )
II. Un cono oblicuo tiene sección axial. ( )
III. Dos conos congruentes tienen el mismo volumen. ( )
IV. Dos conos semejantes tienen la misma altura. ( )

22. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

I. La directriz del cono tiene líneas rectas. ( )
II. La generatriz del cono es una línea curva. ( )
III. Un cono siempre está inscrito en una pirámide. ( )
IV. En un cono oblicuo su altura coincide con su centroide. ( )

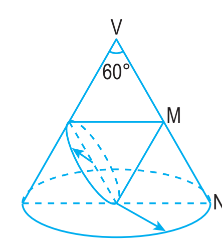
Razonamiento y demostración

23. En la figura se tiene el cono circular recto, $\overline{VC}//\overline{AB}$, m∠VAM = m∠MAO y VC = 6. Calcula el volumen del cono.



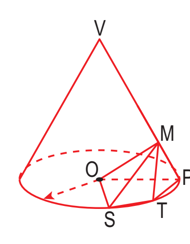
A) $3\pi\sqrt{2}$ B) $6\pi\sqrt{3}$
C) 12π D) $9\pi\sqrt{3}$
E) $\frac{15}{2}\pi\sqrt{3}$

24. En el gráfico se tienen dos conos rectos y VM = MN. Calcula la razón entre los volúmenes de los conos menor y mayor.



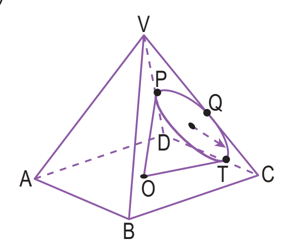
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{5}$
E) $\frac{1}{7}$

25. En el gráfico se tiene un cono de revolución, VM = 3(MP) y $m\overset{\frown}{ST} = m\overset{\frown}{TP} = 45°$. Si el volumen de la pirámide M-OSTP es 1 cm^3, calcula el volumen del cono.



A) $4\sqrt{2}\pi$ cm^3
B) $\frac{\pi}{3}$ cm^3
C) $\frac{5\pi}{8}$ cm^3
D) $\frac{6}{17}\pi$ cm^3
E) 2π cm^3

26. En el gráfico V-ABCD es una pirámide regular cuadrangular, O es centro de la base ABCD y VA = AB. Calcula la razón de volúmenes del cono circular y la pirámide (P, Q y T son puntos de tangencia).



A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{36}$

Resolución de problemas

27. En la superficie del desarrollo de un cono equilátero se inscribe una circunferencia de radio 1 m. Calcula el volumen del cono.

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ m^3 B) 2π m^3 C) 3π m^3
D) 4π m^3 E) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ m^3

28. En un cono de revolución, el ángulo de desarrollo mide 180° y la altura mide $2\sqrt{3}$. Calcula el área de la superficie lateral de dicho cono.

A) 3π B) 4π C) 5π
D) 8π E) 6π

29. En un cono de revolución el vértice dista de la base 10 m y el radio de la esfera inscrita mide 4 m. Calcula el área de la superficie lateral del cono.

A) 100π m^2 B) 118π m^2 C) 120π m^2
D) 126π m^2 E) 136π m^2

30. En la base de un cono de revolución de 8 m de altura, se traza una cuerda de $8\sqrt{2}$ m de longitud, además, la distancia del centro de dicha cuerda al vértice mide $2\sqrt{17}$ m. Halla la medida del ángulo formado al desarrollar el cono.

A) 214° B) 220° C) 218°
D) 216° E) 210°

Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. E
4. C
5. C
6. C
7. A
8. D
9. A
10. C

NIVEL 2
11. D
12. B
13. C
14. B
15. D
16. C
17. E
18. C
19. E
20. C

NIVEL 3
21.
22.
23. D
24. C
25. A
26. E
27. A
28. D
29. C
30. D

Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: ESFERA Y SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

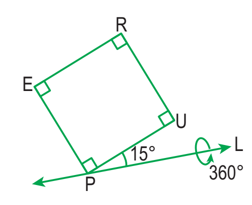
1 El área de un casquete esférico es 80π m^2 y el radio de la esfera que lo contiene mide 10 m. Calcula el área de la base del casquete esférico.

A) 62π m^2 B) 64π m^2 C) 68π m^2
D) 70π m^2 E) 72π m^2

2 Pintar el piso de un reservorio de petróleo que tiene forma de una semiesfera, cuesta \$100. ¿Cuánto costará pintar la superficie exterior, si el pago por cada metro cuadrado es el mismo?

A) \$100 B) \$120 C) \$160
D) \$200 E) \$500

3 Calcula el área de la superficie generada por el cuadrado PERU de lado 4, cuando gira alrededor de $\overleftrightarrow{L_1}$.

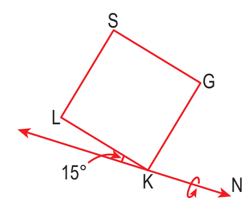


A) $32\sqrt{6}\,\pi$ u^2 B) $36\sqrt{6}\,\pi$ u^2 C) $18\sqrt{2}\,\pi$ u^2
D) $54\sqrt{3}\,\pi$ u^2 E) $16\sqrt{6}\,\pi$ u^2

4 Calcula el volumen generado por la región sombreada al dar una revolución sobre $\overleftrightarrow{L_1}$.

A) 142π u^3 B) 148π u^3 C) 150π u^3
D) 254π u^3 E) 296π u^3

5 Calcula el área de la superficie generada por el cuadrado KLSG cuyo lado mide 4 m, al girar 360° alrededor de la recta N.

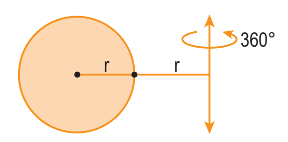


A) $32\pi\sqrt{6}$ m^2 B) $30\pi\sqrt{3}$ m^2 C) $38\pi\sqrt{6}$ m^2
D) $40\pi\sqrt{2}$ m^2 E) $34\pi\sqrt{6}$ m^2

6 Halla el volumen que se genera al girar 360° la región sombreada alrededor del eje.

A) $11\pi^2$ u^3 B) $13\pi^2$ u^3 C) $10\pi^2$ u^3
D) $3\pi^2$ u^3 E) $9\pi^2$ u^3

7 Halla el volumen generado al girar el círculo de radio r.

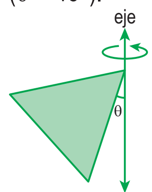


A) πr^3 u^3
B) $2\pi^2 r^3$ u^3
C) $\frac{2\pi^2}{3} r^3$ u^3
D) $4\pi^2 r^3$ u^3
E) $4\pi^2\sqrt{3}\, r^3$ u^3

8 Una bola de plomo de radio 3 cm, es fundida para obtener **n** pelotitas de radio 1 cm. Halla el valor de **n**.

A) 3
B) 9
C) 27
D) 6
E) 18

9 Calcula el volumen generado al girar la región triángular equilátera, cuyo lado mide 6, 360° alrededor del eje mostrado (θ = 15°).



A) $50\pi\sqrt{2}$ u^3
B) $54\pi\sqrt{2}$ u^3
C) $30\pi\sqrt{2}$ u^3
D) $20\pi\sqrt{2}$ u^3
E) $40\pi\sqrt{2}$ u^3

10 Halla la relación de los volúmenes entre las esferas inscrita y circunscrita en un mismo hexaedro regular.

A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
E) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

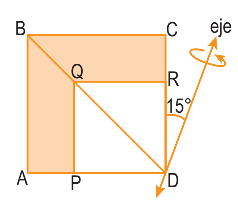
11 Halla el radio de la semiesfera inscrita en un tetraedro regular cuya arista mide 1 m.

A) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ m
B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m
C) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ m
D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m
E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m

12 El área total de la superficie de un segmento esférico de dos bases es 11π cm^2. Halla la longitud del radio de la base mayor, sabiendo que la diferencia entre las longitudes de los radios de las bases es 1 cm, la altura del segmento es 1 cm y el radio de la esfera que lo contiene mide 3 cm.

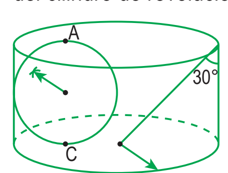
A) 3 cm
B) 4 cm
C) 2 cm
D) 5 cm
E) 6 cm

13 En la figura, ABCD y PQRD son cuadrados, AP = 2, PD = 4. Halla el volumen que se genera al girar 360° alrededor del eje, la región sombreada.



A) $70\pi\sqrt{2}$ u^3
B) $72\pi\sqrt{2}$ u^3
C) $73\pi\sqrt{2}$ u^3
D) $76\pi\sqrt{6}$ u^3
E) $70\pi\sqrt{3}$ u^3

14 En la figura, A y C son puntos de tangencia. Calcula la razón entre las áreas de la superficie esférica y la superficie lateral del cilindro de revolución.



A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Claves

1. B	3. A	5. A	7. D	9. B	11. B	13. D
2. D	4. E	6. A	8. C	10. C	12. C	14. C

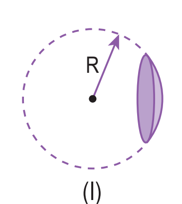


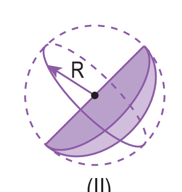
Practiquemos

NIVEL 1

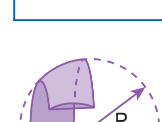
Comunicación matemática

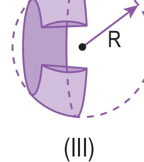
1. Señala qué porción de sólido o superficie esférica son:

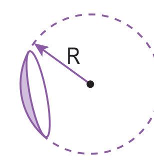


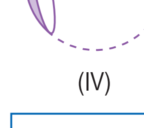


(I) (II)

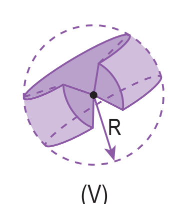


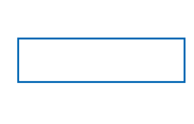






(III) (IV)





(V)

2. ¿Cuántas proposiciones son incorrectas?

I. Una línea curva coplanar y no secante al eje de giro genera un sólido de revolución. ( )

II. Un segmento circular genera un sector esférico. ( )

III. Una región plana, coplanar y no secante con el eje de giro genera un sólido. ( )

IV. Una línea curva, alabeada con el eje de giro genera una superficie de revolución. ( )

A) 2 B) 0 C) 1
D) 3 E) 4

3. ¿Cuántas proposiciones son verdaderas?

I. Un cilindro es un sólido de revolución. ( )

II. Un cono es un sólido de revolución. ( )

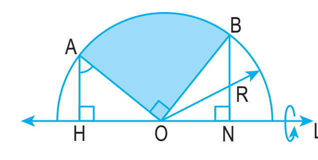
III. Un sector circular genera un anillo esférico. ( )

IV. Una recta perpendicular al eje de giro genera una superficie de revolución. ( )

A) 3 B) 4 C) 2
D) 0 E) 1

Razonamiento y demostración

4. Calcula el volumen generado por la región sombreada al dar una revolución alrededor de $\overleftrightarrow{L}$, si: BN = 5 m y ON = 4 m.

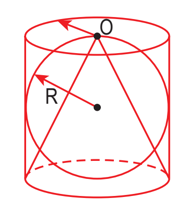


A) 220π m^3 B) 210π m^3
C) 216π m^3 D) 218π m^3
E) 246π m^3

5. Según la figura, halla: $x^2 + y^2 + z^2$

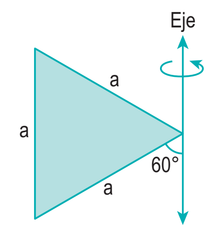
$$\frac{V_{esfera}}{x} = \frac{V_{cono}}{y} = \frac{V_{cilindro}}{z}$$

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14



6. Halla el volumen generado, si a = 6 cm.

A) 144π cm^3
B) 120π cm^3
C) 36π cm^3
D) 108π cm^3
E) $36\sqrt{3}\,\pi$ cm^3



Resolución de problemas

7. Halla la relación entre las áreas de un hexaedro regular y de la superficie esférica circunscrita al hexaedro.

A) $\frac{3}{\pi}$ B) $\frac{4}{\pi}$ C) $\frac{5}{\pi}$ D) $\frac{2}{\pi}$ E) $\frac{3}{2\pi}$

8. Una esfera de radio 6 cm es fundida y convertida en un cilindro de radio 4 cm y altura h. Halla la superficie lateral del cilindro.

A) 144π cm^2 B) 36π cm^2
C) 48π cm^2 D) 36π cm^2
E) 54π cm^2

9. Un cono de radio 6 y generatriz 10, es fundido y convertido a una esfera de radio R. Halla la superficie de la esfera.

A) $24\sqrt{3}\,\pi$ u^2 B) 24π u^2
C) $24\sqrt[3]{3}\,\pi$ u^2 D) $24\sqrt[3]{2}\,\pi$ u^2
E) $48\pi\sqrt[3]{3}$ u^2

10. Si V y A son el volumen y área total de un octaedro regular, respectivamente; calcula el radio de la esfera inscrita en el octaedro.

A) $\frac{V}{A}$ B) $\frac{2V}{A}$ C) $\frac{3V}{A}$

D) $\frac{4V}{3A}$ E) $\frac{3V}{2A}$

11. Un semicírculo de diámetro AB, gira alrededor de su diámetro en un ángulo de 60°. Calcula el volumen del sólido generado si: AB = 6 m

A) 6π m^3 B) 9π m^3
C) $3\sqrt{6}\,\pi$ m^3 D) $6\sqrt{3}\,\pi$ m^3
E) 12π m^3

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Indica V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

I. Una región plana no convexa, coplanar y no secante con el eje de giro genera un sólido de revolución. ( )

II. Una recta perpendicular al eje de giro genera un sólido de revolución. ( )

III. Un sólido de revolución puede ser generado por una superficie secante y coplanar al eje de giro. ( )

IV. Una figura plana, coplanar y secante al eje de giro forma un sólido no convexo. ( )

13. Indica cuáles son verdaderas:

I. Un segmento que interseca al eje de giro (no perpendicularmente) forma una superficie de revolución. ( )

II. Una región plana paralela al eje de giro genera un sólido de revolución. ( )

III. Una región plana secante al eje de giro genera un sólido de revolución. ( )

IV. Un cubo genera un sólido de revolución. ( )

A) Solo I B) I y II C) Solo II
D) I; III y IV E) II y IV

14. Indica cuántas premisas no son falsas:

I. Un rectángulo, coplanar y no secante al eje de giro forma un sólido de revolución. ( )

II. Una región plana, coplanar con el eje de giro genera un sólido de revolución. ( )

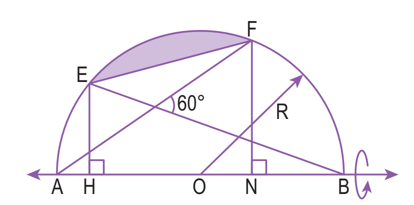
III. Un segmento circular y secante con el eje de giro forma una superficie de revolución. ( )

IV. Un área circular, coplanar y no secante al eje de giro forman un sólido no convexo. ( )

A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 0

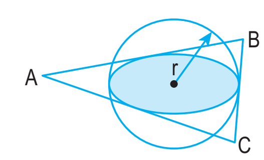
Razonamiento y demostración

15. Calcula el volumen del sólido generado por la región sombreada, cuando gira 360° alrededor de $\overline{AB}$. Si: R = 6 m y HN = 5 m.



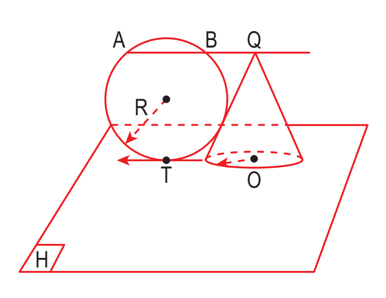
A) 30π m^3 B) 32π m^3 C) 36π m^3
D) 40π m^3 E) 42π m^3

16. Halla el volumen de la esfera, si AB = 5, BC = 6 y AC = 7.



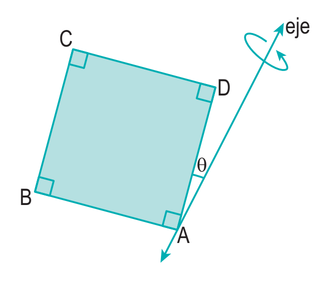
A) $32\sqrt{3}\,\pi$ B) 64π C) $\frac{32}{27}\pi$
D) $\frac{64}{27}\sqrt{6}\,\pi$ E) 27π

17. En la figura $\overline{AB}$ // $\overline{OT}$, AB = $R\sqrt{3}$, el volumen de la esfera es $32\sqrt{3}\,\pi$. Calcula el volumen del cono equilátero. (T es punto de tangencia y O es centro).



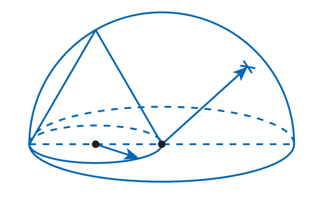
A) $18\sqrt{3}\,\pi$ B) $3\sqrt{3}\,\pi$ C) $9\sqrt{3}\,\pi$
D) $12\sqrt{3}\,\pi$ E) $15\sqrt{3}\,\pi$

18. La región cuadrada ABCD, al girar 360° alrededor del eje, genera un sólido de $4\pi\sqrt{6}$ cm^3 de volumen (θ = 15°). Calcula el perímetro del cuadrado.



A) 5 cm B) 6 cm C) 12 cm
D) 8 cm E) 4 cm

19. En la figura, el cono es de revolución y el área de su superficie lateral es 18π cm^2. Calcula el área de la superficie de la semiesfera.



A) 72π cm^2 B) 96π cm^2 C) 100π cm^2
D) 108π cm^2 E) 144π cm^2

Resolución de problemas

20. En un recipiente cúbico de 6 cm de lado, lleno de agua, se introduce una pelotita de 3 cm de radio; haciendo rebalsar el agua. Luego se retira la pelotita, quedando un poco de agua en el recipiente. ¿Qué altura de agua queda en el recipiente?

A) $(6 + \pi)$ cm B) $(3 + \pi)$ cm
C) $(\pi - 3)$ cm D) $(6 - \pi)$ cm
E) $(\sqrt{3} + \pi)$ cm

21. Dado un octaedro regular de volumen $9\sqrt{2}$ m^3, calcula el área de la superficie esférica inscrita en el octaedro.

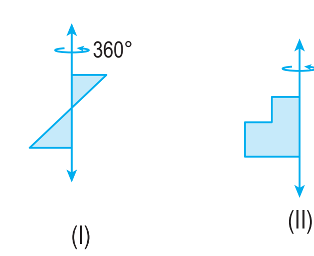
A) 3π m^2 B) 9π m^2 C) 5π m^2
D) 6π m^2 E) 7π m^2

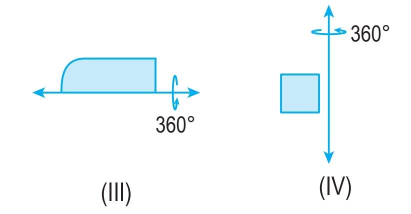
22. Calcula el área total del sólido generado al girar la región de un cuadrante alrededor de uno de sus radios en un ángulo de 18°; si el radio de dicho cuadrante mide 3 m.

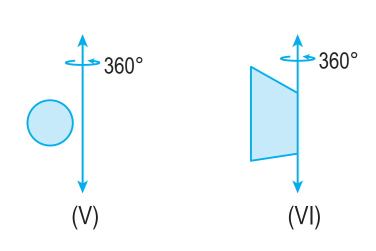
A) 16π m^2 B) $\frac{10\pi}{9}$ m^2
C) $\frac{9\pi}{10}$ m^2 D) $\frac{9\pi}{16}$ cm^2
E) 12π m^2

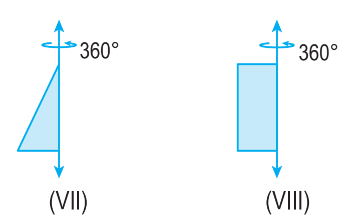
NIVEL 3

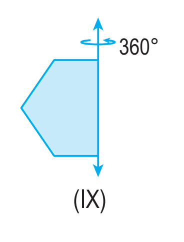
Comunicación matemática

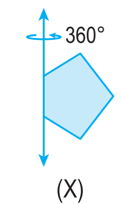


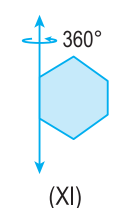


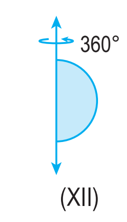












23. De las figuras mostradas, cuáles generan sólidos no convexos:

____

24. De las figuras mostradas, indica cuáles generan sólidos de revolución convexos:

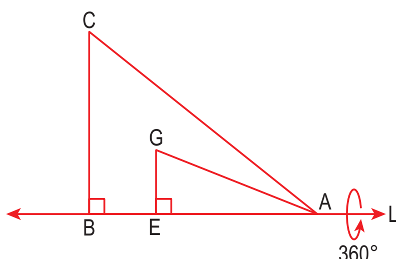
____

25. De las figuras mostradas; qué superficies generadas pueden ser formadas por generatrices:

____

Razonamiento y demostración

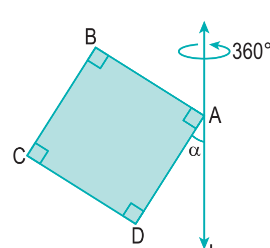
26. ¿En qué relación están los volúmenes de los sólidos generados al girar las regiones GEA y CBA? (G es baricentro del triángulo ABC).



A) $\frac{2}{27}$ B) $\frac{1}{21}$ C) $\frac{3}{20}$

D) $\frac{4}{25}$ E) $\frac{2}{9}$

27. Determina la medida del ángulo α de modo que el volumen generado al rotar la región cuadrada en torno a $\overleftrightarrow{L}$, sea el mayor posible.

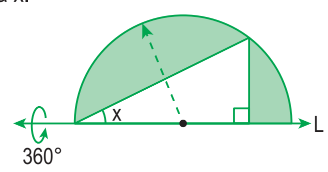


A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 90°

28. Calcula el volumen del sólido generado por la región rectangular ABCD alrededor de $\overleftrightarrow{L}$. Si: BC = 15 m y θ = 37°.

A) 5750π m^3
B) 7500π m^3
C) 7200π m^3
D) 5800π m^3
E) 6200π m^3

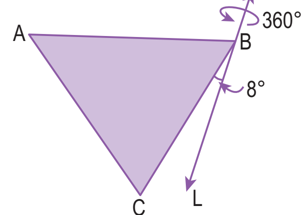
29. Del gráfico, la razón de los volúmenes de los sólidos generados por las regiones sombreadas al girar 360° alrededor de $\overleftrightarrow{L}$ es 80/13. Calcula x.



A) 15° B) 26° 30' C) 18° 30'
D) 22° 30' E) 30°

30. Según la figura, AB = 13, AC = 14 y BC = 15. Calcula el volumen del sólido generado por la región triangular ABC al girar 360° en torno a $\overleftrightarrow{L}$.

A) $250\sqrt{2}\,\pi$ u^3
B) $300\sqrt{2}\,\pi$ u^3
C) $300\sqrt{2}$ u^3
D) $200\sqrt{2}\,\pi$ u^3
E) $560\sqrt{2}\,\pi$ u^3



Resolución de problemas

31. Calcula el radio de la esfera inscrita en un octante de esfera de radio 4.

A) $2(\sqrt{3}-1)$ B) $2(\sqrt{2}-1)$ C) $2(\sqrt{3}+1)$
D) $\sqrt{2}-1$ E) $\sqrt{3}-1$

32. En un cono equilátero, se inscribe una esfera de radio r. Halla el volumen del cono parcial que determina el plano que contiene los puntos de tangencia de la esfera con las generatrices del cono.

A) $\frac{\pi r^3}{6}$ B) $\frac{\pi r^3}{3}$ C) $\frac{3\pi r^3}{8}$
D) $\frac{\pi r^3}{9}$ E) $\frac{2\pi r^3}{3}$

33. Calcula el volumen de una cuña esférica equivalente a un sector esférico, ambos en una misma esfera, de radio 3 cm. Dicho sector es generado por un sector circular, cuya proyección de su arco tiene por longitud la mitad del diámetro correspondiente.

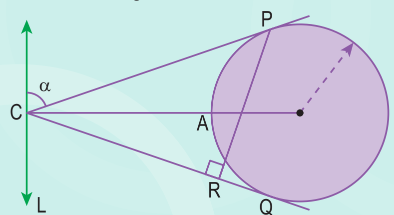
A) 10π cm^3 B) 12π cm^3 C) 15π cm^3
D) 16π cm^3 E) 18π cm^3

Claves

NIVEL 1	8. A	14. A	21. D	28. B
1.	9. E	15. A	22. C	29. B
2. D	10. C	16. D	NIVEL 3	30. E
3. D	11. A	17. C	23.	31. A
4. E		18. D	24.	32. C
5. E	NIVEL 2	19. D	25.	33. E
6. D	12.	20. D	26. A	
7. D	13. A		27. C	

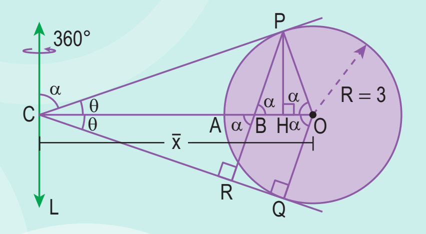
En la figura P y Q son puntos de tangencia.

Si $m\overset{\frown}{PQ} = 2\alpha$ y $BO = 2(AB) = 2$. Halla el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360° alrededor de $\overleftrightarrow{L}$.



Resolución:

Sea: $V_{Sol.}$ es el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360° alrededor de $\overleftrightarrow{L}$.



Del dato:

$AB = 1$ y $BO = 2 \Rightarrow R = AO = 3$

Del gráfico:

- Por la bisectriz CO: $\alpha + \theta = 90° \Rightarrow m\angle POC = m\angle COQ = \alpha$
- Por ángulos opuestos: $m\angle CBR = m\angle PBO = \alpha$
- Del $\triangle PBQ$ (isósceles): $BH = HO = \dfrac{BO}{2} = 1$
- Por semejanza de triángulos: $PHO \sim CPO$

  $\dfrac{PO}{CO} = \dfrac{HO}{PO} \Rightarrow \dfrac{3}{\bar{x}} = \dfrac{1}{3} = \bar{x} = 9$
- El área de la circunferencia:

  $A = \pi R^2 = \pi \cdot 9$
- Por el teorema de Pappus - Guldin:

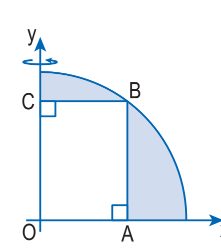
  $V_{Sol.} = 2\pi(A)\bar{x}$

  $= 2\pi(\pi \cdot 9) \cdot 9$

  $\therefore V_{Sol.} = 162\pi^2$



1. En el gráfico adjunto, la curva es un segmento de circunferencia de radio 10 y el segmento OA mide 6. Determina el volumen generado por la región sombreada al girar en torno al eje y.



A) $\dfrac{1136}{3}\pi$

B) 852π

C) $\dfrac{568}{3}\pi$

D) 568π

E) 1136π

2. El área lateral de un cono de revolución mide **b** y la distancia del centro de la base a una de sus generatrices mide **a**. Entonces el volumen de dicho cono es.

A) (ab) B) $\dfrac{a+b}{3}$ C) $\dfrac{ab}{2}$

D) $(3ab)$ E) $\dfrac{ab}{3}$

3. Las bases de un tronco de cono de revolución son dos círculos de radios 3 y 6 unidades, respectivamente. Halla el radio de la esfera circunscrita, si la generatriz mide 5 unidades.

A) $\dfrac{5\sqrt{96}}{7}$ u B) $\dfrac{3\sqrt{97}}{8}$ u C) $\dfrac{5\sqrt{96}}{8}$ u

D) $\dfrac{3\sqrt{96}}{8}$ u E) $\dfrac{5\sqrt{97}}{8}$ u

4. El radio de la base de un cono circular recto mide **R** unidades y su altura mide **H** unidades. La altura del cilindro de mayor área lateral inscrito en el cono es:

A) $\dfrac{H}{9}$ B) $\dfrac{H}{2}$ C) $\dfrac{H}{3}$ D) $\dfrac{2H}{5}$ E) $\dfrac{3H}{4}$

5. Calcula el volumen de una pirámide de base triangular en la que dos de sus caras son triángulos equiláteros de lado **L** y las otras dos son triángulos rectángulos isósceles.

A) $\dfrac{L^3}{8}\sqrt{5}$ B) $\dfrac{L^3}{12}\sqrt{5}$ C) $\dfrac{L^3}{8}\sqrt{2}$

D) $\dfrac{L^3}{10}\sqrt{2}$ E) $\dfrac{L^3}{12}\sqrt{2}$

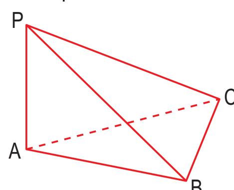
6. El centro de la esfera inscrita en una pirámide cuadrangular regular coincide con el centro de la esfera circunscrita a dicha pirámide. La medida del ángulo diedro en una arista de la base es:

A) $\arccos(\sqrt{3} - 1)$ B) $\arccos(\sqrt{2} - 1)$

C) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

E) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

7. En la figura mostrada $\overline{PA}$ es perpendicular al plano del $\triangle ABC$ y $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$. Si $BC = a$, $m\angle ABP = \theta$ y $m\angle BCP = \alpha$ halla el volumen de la pirámide P - ABC.



A) $\dfrac{a^3}{12}\tan^2\alpha\,\mathrm{sen}2\theta$ B) $\dfrac{a^3}{12}\tan\alpha\,\mathrm{sen}^2 2\theta$ C) $\dfrac{a^3}{12}\tan\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta$

D) $\dfrac{a^3}{12}\tan^2\alpha\,\mathrm{sen}\theta$ E) $\dfrac{a^3}{12}\tan\alpha\,\mathrm{sen}2\theta$